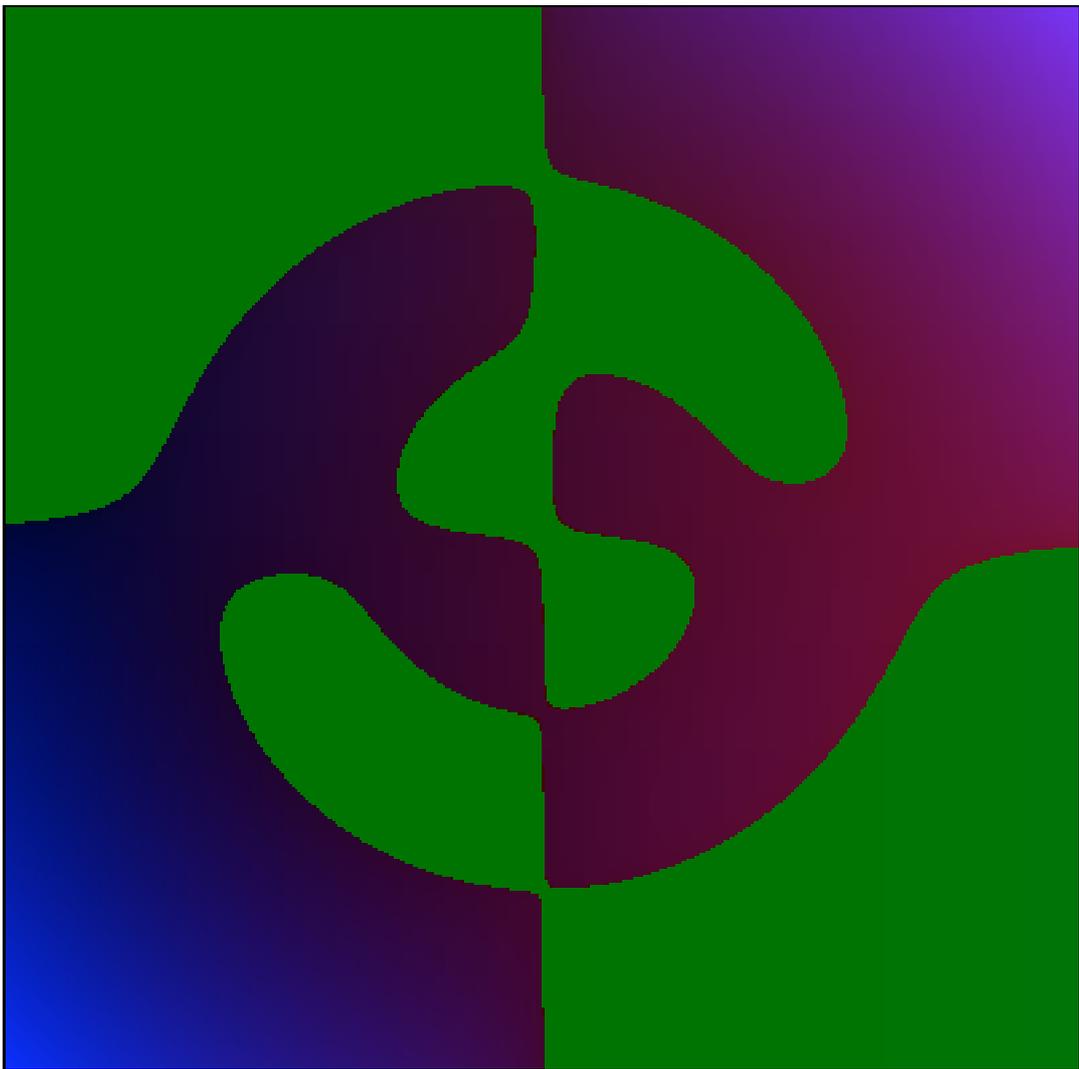


---

Felice Ronga

# Analyse réelle néo-post-élémentaire

---



sextique d'équation :

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)xy + 7/100(x^2 + 1/10(y + 1/2)(y - 5/2))(x^2 + (y + 2)^2 - 1/2) = 0$$

Genève, 2004 ap. J.-C.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Espaces métriques et théorème du point fixe</b>	<b>1</b>
1	Espaces métriques et espaces vectoriels normés	1
2	Ouverts, fermés, adhérence	7
3	Espaces complets	12
4	Le théorème du point fixe et premières applications	15
5	Construction de fractals par la méthode des IFS	20
5.1	Exemples d'objets fractals	20
5.2	La dimension de Hausdorff (1918)	22
5.3	L'espace métrique complet $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$	24
5.4	La méthode IFS	27
5.5	Exemples de programmes informatiques	33
6	Exercices	36
<b>II</b>	<b>Dérivabilité, théorème des fonctions implicites</b>	<b>41</b>
1	Dérivabilité, différentiabilité	41
1.1	Norme d'une application linéaire	41
1.2	L'inégalité fondamentale de l'intégrale	42
1.3	Dérivabilité, différentiabilité	43
1.4	Dérivées d'ordre supérieur et formule de Taylor	47
2	Le théorème des fonctions implicites	54
2.1	Dépendance des racines simples d'une famille de polynômes par rapport à des paramètres	59
2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la recherche d'extrema liés	62
3	Eléments de calcul des variations	68
3.1	Géodésiques sur les surfaces	73
4	Théorèmes de l'application inverse et du rang	76
4.1	Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$	79
5	Singularités d'applications, contours apparents, enveloppes	82
5.1	Enveloppes	87
6	Exercices	90
<b>III</b>	<b>Equations différentielles ordinaires</b>	<b>95</b>
1	Introduction, exemples	95
1.1	Transport de champs de vecteurs	98
1.2	Classification des systèmes linéaires dans le plan	100
2	Théorèmes d'existence et unicité	106
3	Equations différentielles linéaires	113
3.1	Résultats généraux	113
3.2	Complexification	114
3.3	Equations linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants	115
3.4	Systèmes linéaires à coefficients constants	120
3.5	Equations d'ordre deux à points singuliers réguliers	125
4	Equations non linéaires : stabilité	129

4.1	Méthode directe de <b>Ляпунов</b> (1892)	131
4.2	Etudes de la stabilité des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par linéarisation	133
4.3	Stabilité structurelle	135
5	Exercices	137
<b>IV Formes différentielles</b>		<b>143</b>
1	Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$	143
2	Formes différentielles	148
3	Intégration de formes et théorème de Stokes	152
4	Applications	154
5	Exercices	157
<b>Bibliographie</b>		<b>159</b>
<b>Index</b>		<b>160</b>

# Table des figures

I.1	L'aire hachurée représente la norme la norme $\  \cdot \ _1$ de la fonction $t^n$ . . . . .	5
I.2	$f^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon])$ n'est pas un voisinage de $(0, 0)$ . . . . .	9
I.3	Les polynômes de Bernstein de degré 4 . . . . .	11
I.4	L'aire hachurée représente la distance pour la norme $\  \cdot \ _1$ . . . . .	13
I.5	Méthode de Newton selon <b>4.2</b> et selon <b>4.3</b> . . . . .	18
I.6	Construction de l'ensemble de Cantor . . . . .	21
I.7	Le triangle de Sierpinski, dessiné à l'aide de la méthode des I.F.S. . . . .	21
I.8	Construction de la courbe de Von Koch . . . . .	22
I.9	La courbe de Von Koch, dessinée à l'aide de la méthode des I.F.S. . . . .	22
I.10	Comportement de la $s$ -mesure de $A$ selon les valeurs de $s$ . . . . .	24
I.11	La distance de Hausdorff de $A$ à $B$ est inférieure à $\varepsilon$ . . . . .	25
I.12	Distance de Hausdorff du carré au cercle inscrit . . . . .	26
I.13	Itérations convergeant vers le triangle de Sirpinski . . . . .	29
I.14	Itérations convergeant vers le triangle de Sirpinski . . . . .	30
I.15	La fougère avec un bon et un mauvais choix de probabilités . . . . .	32
I.16	Esquisse des transformations qui codent la feuille de fougère . . . . .	33
I.17	Un bon Cantor . . . . .	35
I.18	Un mauvais Cantor . . . . .	35
II.1	Passage d'une relation implicite à une relation explicite . . . . .	55
II.2	Le théorème des fonctions implicites . . . . .	58
II.3	La courbe d'équation $y^2 - x(x - 1)^2 = 0$ . . . . .	58
II.4	La courbe d'équation $y^2(1 - x) - x(2x - 1)^2 = 0$ . . . . .	62
II.5	Exemple d'extremum lié : distance minimale d'une courbe à un point donné . . . . .	62
II.6	Valeurs extrémales de $x \cdot y$ sur le cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . . . . .	67
II.7	La parabole semi-cubique, d'équation $y^2 - x^3 = 0$ . . . . .	67
II.8	Calcul de la longueur du graphe de $\varphi$ . . . . .	68
II.9	Calcul de l'aire de la surface engendrée par rotation du graphe de $\varphi$ . . . . .	69
II.10	Graphe de la fonction "en cloche" . . . . .	71
II.11	Graphes engendrant des surfaces minimales par rotation autour de l'axe $Ox$ . . . . .	73
II.12	La sphère, le cylindre et le cône . . . . .	73
II.13	Le théorème de l'application inverse . . . . .	77
II.14	Le théorème du rang lorsque $n = 1, p = 2$ et $n = 2, p = 1$ . . . . .	79
II.15	Le tore . . . . .	80
II.16	Diverses façons de donner une description locale d'une sous-variété . . . . .	82
II.17	Le pli et la fonce . . . . .	83
II.18	Contour apparent de la projection sur le plan $x + 0.4z = 0$ du tore . . . . .	83
II.19	Contour apparent et projection d'une courbe tracée sur une surface . . . . .	84
II.20	Contour apparent de la projection d'une surface sur un plan . . . . .	86
II.21	Application stables d'une courbe dans le plan . . . . .	86
II.22	Enveloppe de la famille de cercles (...) . . . . .	87
II.23	Enveloppe de la famille de droites (...) . . . . .	88

II.24 La surface $S$ associée à la famille de droites précédente, vue de côté . . . . .	89
II.25 La même surface d'avant vue d'en haut . . . . .	89
II.26 Une caustique dans la nature . . . . .	90
II.27 Lieu des centres des cercles osculateurs à une parabole . . . . .	91
III.1 Allure des solutions de $y' = 2ty^2$ . . . . .	97
III.2 Solutions de $y' = 3y^{2/3}$ . . . . .	98
III.3 Solutions de $(x, y)' = (x^2 - y^2, 2xy)$ . . . . .	101
III.4 $A$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ . . . . .	104
III.5 $A$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ . . . . .	104
III.6 $A$ non diagonalisable . . . . .	105
III.7 Exemples d'allure dans une base quelconque . . . . .	105
III.8 Construction de solutions approchées . . . . .	107
III.9 Trajectoires de l'équation prédateur-proie . . . . .	130
III.10 La bifurcation de Hopf . . . . .	137
IV.1 Interprétation géométrique de la forme $\omega$ . . . . .	149
IV.2 La rétraction $g(x)$ associée à $f(x)$ . . . . .	155
IV.3 Interprétation du lemme <b>4.7</b> . . . . .	157

# Chapitre I

## Espaces métriques et théorème du point fixe

*Sommaire.*<sup>1</sup> Le fait que toute suite de Cauchy de nombres réels converge permet de construire des nombres réels tels que  $\sqrt{2} = \sup \{x \mid x^2 \leq 2\}$  ou  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ . Dans ce chapitre nous généralisons la notion de distance de 2 nombres et les notions associées (limites de suites, continuité, suites de Cauchy) à des espaces plus généraux, tels que l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues de l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , ou encore l'espace des  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  des sous-espaces compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ .

Cela nous permettra par la suite de construire des fonctions (par exemple des solutions explicites d'équations implicites, ou des solutions d'équations différentielles) comme limite de suites de Cauchy dans des espaces appropriés, de manière analogue à la construction de nombres réels. Ces constructions se feront pour la plupart en se ramenant au théorème du point fixe (§ 3).

Au § 4 on montre comment la plupart des objets fractals usuels se définissent et se construisent naturellement à l'aide du théorème du point fixe, appliqué à certaines transformations de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ .

### 1 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

La notion de distance entre 2 points du plan ou de l'espace nous est familière. Plus généralement, dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  on utilise ce qu'on appelle la distance euclidienne:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1 \dots n} (x_i - y_i)^2} \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad .$$

La définition suivante généralise la distance euclidienne.

**Définition 1.1 (Espace métrique)** Un espace métrique  $(X, d)$  est un ensemble  $X$  muni d'une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes:

- (1)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$  , et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie).
- (3)  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( inégalité du triangle).

L'exemple par excellence est bien sûr  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne. Voici d'autres exemples :

- (1) Sur  $\mathbb{R}^n$  on peut considérer d'autres métriques :

- $d_\infty(x, y) = \max \{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\}$
- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

---

<sup>1</sup> Analyse II B (analyse réelle), par Felice Ronga – Version du 7 juillet 2004, à 15h. 51

(2) Soit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$ . Si  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  on pose:

$$d_\infty(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\} \quad .$$

(3) On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque  $X$  en posant, pour  $x, y \in X$ :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad .$$

On l'appelle métrique discrète.

(4) Métrique induite. Si  $(X, d)$  est un espace métrique et  $A$  un sous-ensemble, la restriction:

$$d|_{A \times A} : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$$

définit une distance sur  $A$ . Ainsi, la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  induit une distance sur la sphère  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ; pour cette métrique, la distance entre le pôle nord et le pôle sud vaut 2.

(5) Métrique produit. Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques; on peut définir une métrique sur  $X \times Y$  par:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y, d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sup \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \quad .$$

On vérifie dans chaque cas que les propriétés (1) à (3) de la définition de distance sont satisfaites. En fait,

dans la plupart des exemples qui précèdent, la métrique provient d'une norme; c'est une donnée en rapport avec la structure d'espace vectoriel, qui s'inspire de la notion de norme des vecteurs de l'espace:

**Définition 1.2 (Espace vectoriel normé)** Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni d'une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie:

- (1)  $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ , et  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , où  $|\lambda|$  désigne respectivement la valeur absolue si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou le module si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- (3)  $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité du triangle.)

Si  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par:

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$$

On vérifie sans peine que les propriétés (1) à (3) de la définition de distance sont satisfaites. Par exemple, la symétrie se montre ainsi:

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d_{\|\cdot\|}(y, x) \quad .$$

Quelques exemples d'espaces vectoriels normés:

(1) Dans  $\mathbb{R}^n$  on peut définir plusieurs normes:

- La norme euclidienne :  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, n} x_i^2}$ , que l'on note aussi  $\|x\|_2$ .
- $\|x\|_\infty = \sup \{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1, \dots, n} |x_i|$ .

(2) L'espace vectoriel  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  peut être muni des normes:

- $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$
- $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$
- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}$

(3) On peut généraliser de plusieurs façons les exemples de (2). D'abord, considérons l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ , noté  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ ; on peut le munir des normes:

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup \{|f(t)|, t \in [0, 1]\} \\ \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)| dt \\ \|f\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

où ici  $|\cdot|$  dénote le module des nombres complexes. On peut encore considérer un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  et l'espace  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  des applications continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Puisque toute application continue sur un compact est bornée, la définition suivante a un sens:

$$\|f\|_\infty = \sup \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, x \in K\}, \quad f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$$

et on vérifie qu'elle définit bien une norme.

(4) Si  $X$  est un ensemble quelconque, on peut considérer l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$  des fonctions bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}^p$  et le munir de la norme:

$$\|f\|_\infty = \sup \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, x \in X\}, \quad f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$$

(5) Si  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ , sa restriction à  $F$  définit une norme sur  $F$ . Par exemple, cela s'applique à

$$P([0, 1], \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i \right\},$$

le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  formé par les applications polynomiales.

(6) Norme produit. Si  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont des espaces normés, on peut définir une norme sur l'espace vectoriel  $E \times F$  par:

$$(x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\| = \sup \{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Le fait que les propriétés (1), (2) et (3) de la définition 1.2 sont satisfaites par ces exemples se vérifie facilement, à l'exception de la propriété (2) ( $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ ) pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  de l'exemple (2), pour laquelle il faut utiliser le lemme suivant. La propriété (3) (inégalité du triangle) de la norme  $\|\cdot\|_2$  se démontre comme pour la norme euclidienne (voir [4, th. IV.1.1].)

**Lemme 1.3** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et supposons que  $f(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$ . Alors:

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \implies \quad f \equiv 0.$$

*Preuve:* Si  $\exists t_0 \in [0, 1]$  avec  $f(t_0) > 0$ , puisque  $f$  est continue  $\exists \delta > 0$ ,  $\delta < 1$ , tel que  $f(t) \geq f(t_0)/2$  si  $|t - t_0| \leq \delta$ ,  $t \in [0, 1]$ . Au moins la moitié de l'intervalle  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  est inclus dans  $[0, 1]$ , et donc:

$$\int_0^1 f(t) dt \geq \int_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1]} f(t) dt \geq \delta \cdot f(t_0)/2 > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.

*q. e. d.*

A l'aide de la notion de distance on va maintenant définir les notions de limite de suites, limite d'applications, continuité d'applications.

**Définition 1.4 (Limite d'une suite)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\{x_n\} \subset X$  une suite dans  $X$ . On dit que cette suite converge vers  $a \in X$  si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et on écrit alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a, \text{ ou encore } x_n \rightarrow a \text{ si } n \rightarrow \infty$$

Remarquons que si elle existe, la limite d'une suite est unique. En effet, si on a  $a$  et  $a'$  dans  $X$  tels que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \text{ tel que } n > N'_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a') < \varepsilon$$

alors, si  $n \geq \sup \{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ ,

$$d(a, a') \leq d(a, x_n) + d(x_n, a') \leq 2\varepsilon$$

et donc  $d(a, a') \leq 2\varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , d'où  $d(a, a') = 0$ , et il en suit que  $a = a'$ .

Par exemple, si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ , dire qu'une suite  $\{f_n\}$  de fonctions converge vers une fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , c'est dire qu'elle converge uniformément vers  $f$ , ce qui implique en particulier la convergence ponctuelle: pour tout  $t \in [0, 1]$  fixé, la suite  $\{f_n(t)\} \subset \mathbb{R}$  converge vers  $f(t)$  (convergence dans  $\mathbb{R}$ ). Par contre, dire que cette suite converge pour la norme  $\| \cdot \|_1$  c'est dire qu'elle converge "en moyenne", ce qui en général n'implique pas la convergence ponctuelle. Par exemple, la suite de fonctions  $\{t^n\} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  ne converge pas pour  $\| \cdot \|_\infty$  (car ce ne pourrait être que vers la fonction identiquement nulle, et  $\|t^n - 0\|_\infty = 1$ ), alors que pour la norme  $\| \cdot \|_1$  elle converge effectivement vers la fonction identiquement nulle:

$$\|t^n - 0\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

**Définition 1.5 (Limite d'une application)** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application,  $a \in X$  et  $b \in Y$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si

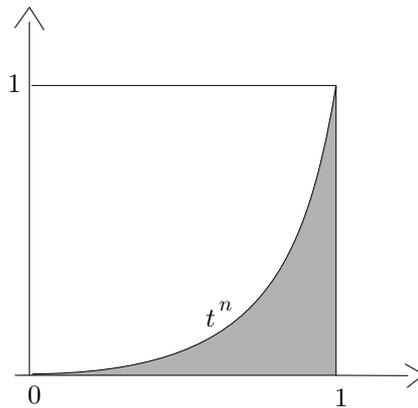
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \text{ tel que } d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

et on écrit alors:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = b, \text{ ou encore } f(x) \rightarrow b \text{ si } x \rightarrow a.$$

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ; on dit que  $f$  est continue si elle est continue en tout point  $a$  de  $X$ .

La proposition suivante montre que l'étude de la limite d'une application peut se ramener à l'étude de limites de suites.

Figure I.1: L'aire hachurée représente la norme la norme  $\| \cdot \|_1$  de la fonction  $t^n$ **Proposition 1.6**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \text{ suite } \{x_n\} \text{ avec } x_n \rightarrow a, \text{ on a: } f(x_n) \rightarrow b$$

*Preuve:* Commençons par l'implication  $\Rightarrow$ . L'hypothèse dit:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } d(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$$

et si  $x_n \rightarrow a$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\exists N_{\delta_\varepsilon} = N'_\varepsilon$  tel que  $n > N'_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \delta_\varepsilon$  ce qui implique encore que  $d(f(x_n), b) < \varepsilon$ , et donc on a bien que  $f(x_n) \rightarrow b$ .

Pour la réciproque, il nous faut raisonner par l'absurde. Nions le fait que  $f(x) \rightarrow b$  si  $x \rightarrow a$ :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x_\delta \text{ tel que } d(x_\delta, a) < \delta \text{ mais } d(f(x_\delta), b) \geq \varepsilon.$$

On peut prendre en particulier  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui nous fournit une suite  $\{x_n\} \subset X$  qui tend vers  $a$ , mais  $d(f(x_n), b) \geq \varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*q.e.d.*

Examinons par exemple la continuité de l'application "évaluation en 0":

$$ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ev_0(f) = f(0) \quad .$$

Puisque  $|f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$ , on voit que  $ev_0$  est continue si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de  $\| \cdot \|_\infty$ . Par contre, la suite de fonctions  $(t-1)^n$  tend vers 0 pour la norme  $\| \cdot \|_1$ , puisque  $\|(t-1)^n\|_1 = 1/(n+1)$ , mais la suite  $ev_0((t-1)^n) = (-1)^n$  ne tend pas vers 0. Nous donnons maintenant une condition qui assure que deux

métriques (ou deux normes) sur un même espace définissent les mêmes notions de limite et de continuité.

**Définition 1.7 (Métriques équivalentes)** Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux métriques sur l'ensemble  $X$ . On dira qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$  telles que:

$$\forall x, y \in X, \quad d_1(x, y) \leq k_1 \cdot d_2(x, y) \quad \text{et} \quad d_2(x, y) \leq k_2 \cdot d_1(x, y) \quad .$$

Si  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  sont deux normes sur l'espace vectoriel  $E$ , on dira qu'elles sont équivalentes s'il existe des constantes  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$  telles que:

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq k_1 \cdot \|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq k_2 \cdot \|x\|_1$$

On vérifie immédiatement que si sur l'espace métrique  $X$  on remplace la métrique  $d_1$  par une métrique  $d_2$  qui lui est équivalente, une suite  $\{x_n\} \subset X$  a pour limite  $a \in X$  relativement à  $d_1$  si et seulement si c'est le cas relativement à  $d_2$ . Il en va de même pour la notion de continuité d'une application  $f : X \rightarrow Y$ , lorsque l'on remplace sur  $X$ , respectivement sur  $Y$ , les métriques par des métriques équivalentes. Aussi, les métriques associées à des normes équivalentes sont équivalentes.

L'exemple de l'application  $ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ci-dessus montre que les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes. On vérifie tout de même que  $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ , ce qui assure que toute suite de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  qui converge uniformément converge aussi en moyenne.

Les diverses normes vues sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes, car on vérifie facilement que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad .$$

En fait on a même plus:

**Proposition 1.8** *Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.*

*Preuve:* Soit  $\|\cdot\|'$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$ . On va montrer qu'elle est équivalente à  $\|\cdot\|_1$ . Tout d'abord, tout  $x \in \mathbb{R}^n$  s'écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  où les  $e_i$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et donc:

$$\|x\|' = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|' \leq \sum |x_i| \|e_i\|' \leq M \cdot \sum_{i=1, \dots, n} |x_i| = M \cdot \|x\|_1$$

où  $M = \sup \{\|e_i\|', i = 1, \dots, n\}$

ce qui montre déjà la moitié de l'équivalence de ces deux normes.

Montrons maintenant que l'application:

$$\|\cdot\|' : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$$

est continue. Voyons d'abord une conséquence de l'inégalité du triangle, valable pour toute norme sur un espace vectoriel  $E$ :

$$\forall x, y \in E, \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

et donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

mais puisque les rôles de  $x$  et  $y$  sont interchangeable, cela prouve que

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$$

(ce qui prouve, entre autre, qu'une norme est toujours une application continue). Revenons à notre norme  $\|\cdot\|'$ . Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  nous avons:

$$\| \|x\|' - \|y\|' \| \leq \|x - y\|' \leq M \|x - y\|_1$$

ce qui montre bien que  $\|\cdot\|' : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue. Il faut se rappeler maintenant que le bord de la boule de rayon 1 pour la norme  $\|\cdot\|_1$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$$

est compact dans  $\mathbb{R}^n$ , et que toute fonction continue sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  atteint son infimum et son maximum (voir [4, IV.2, th. (2.3)] .) Cela implique que

$$\inf \{ \|x\|', \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|_1 = 1 \} = k > 0$$

car si cet infimum était nul, il serait atteint, ce qui voudrait dire qu'il existerait un vecteur  $x$  de  $C$ , donc non nul, avec  $\|x\|' = 0$ . Remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  non nul,  $x/\|x\|_1 \in C$  et donc:

$$\|x\|' = \|x\|_1 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|' \geq \|x\|_1 \cdot k, \text{ i.e } \|x\|_1 \leq (1/k) \|x\|'$$

*q.e.d.*

**Remarque 1.9** En fait il se peut que 2 métriques définissent les mêmes notions de convergence sans être équivalentes au sens de la définition 1.7. Par exemple, si  $(X, d)$  est un espace métrique, on vérifie facilement que la métrique  $d_1(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}$  définit la même notion de convergence que  $d$ , mais n'est pas équivalente à  $d$  si celle-ci n'est pas bornée.

## 2 Ouverts, fermés, adhérence

**Définition 2.1 (La boule)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $a$  un point de  $X$  et  $r > 0$ . On définit la boule (ouverte) de centre  $a$  et rayon  $r$  par:

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

**Définition 2.2 (Sous-ensemble ouvert)** Le sous-ensemble  $U$  de l'espace métrique  $(X, d)$  est dit ouvert si :

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U.$$

### Exemples 2.3

- (1) Dans  $\mathbb{R}$  les boules ne sont autres que les intervalles ouverts bornés:  $B(x, r) = ]x - r, x + r[$ .
- (2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ , car si  $x \neq 0$ ,  $B(x, |x|) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- (3) Plus généralement, dans un espace métrique  $(X, d)$ , si  $a \in X$ ,  $X \setminus \{a\}$  est ouvert.
- (4)  $\mathbb{Q}$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}$ , car toute boule de  $\mathbb{R}$  contient des irrationnels.
- (5) L'ensemble  $U = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) \neq 0\}$  est un ouvert de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ , car si  $f \in U$ ,  $B(f, |f|) \subset U$ . Qu'en est-il pour  $\|\cdot\|_1$ ?
- (6)  $\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$  n'est pas ouvert dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , car dans toute boule de centre  $0 \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  on trouve des fonctions continues qui ne sont pas polynomiales (par exemple celles de la forme  $r \cdot \sin(2\pi t)$ ).
- (7) Les boules elles-mêmes sont des ouverts: si  $x \in B(a, r)$ , alors  $r' = r - d(x, a) > 0$ , et  $B(x, r') \subset B(a, r)$ , car si  $y \in B(x, r')$ ,  $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r' + d(x, a) = r$ .
- (8) Si l'ensemble  $X$  est muni de la métrique discrète, tout sous-ensemble est ouvert.

**Définition 2.4 (Sous-ensemble fermé)** Le sous-ensemble  $F$  de l'espace métrique  $(X, d)$  est dit fermé si son complémentaire  $X \setminus F$  est ouvert.

Par exemple, les sous-ensembles constitués par un point sont fermés.

**Définition 2.5 (Adhérence d'un sous-ensemble)** Soit  $A \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $X$ . On définit l'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$  par:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Remarquons que  $A \subset \overline{A}$ , puisque si  $x \in A$ ,  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \ni x$ . La prochaine proposition fait le lien entre la notion de fermé et d'adhérence, et montre qu'on peut exprimer l'adhérence en termes de limites de suites.

**Proposition 2.6** (1)  $A$  est fermé  $\Leftrightarrow A = \overline{A}$ .

(2)  $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists \text{ une suite } \{x_n\} \subset A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x\}$ .

*Preuve:* (1) Si  $A$  est fermé et  $x \in X \setminus A$ , puisque ce dernier est ouvert  $\exists r > 0$  t.q.  $B(x, r) \subset X \setminus A$  et  $x \notin \overline{A}$ ; donc  $A = \overline{A}$ .

Réciproquement, si  $A = \overline{A}$  et  $x \in X \setminus A$ , alors  $x \notin \overline{A}$ , donc  $\exists r > 0$  t.q.  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ , c'est-à-dire  $B(x, r) \subset X \setminus A$ .

(2) Si  $x_0 \in \overline{A}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B(x_0, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ , donc  $\exists x_n \in B(x_0, 1/n) \cap A$ , et alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x_0$ .

Réciproquement, si  $\exists \{x_n\} \subset A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ ,  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \ni x_n$  pour  $n \geq N_r$ , et donc on a bien que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

*q.e.d.*

### Exemples 2.7

(1) L'adhérence du sous-ensemble  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  est  $\mathbb{R}$  lui-même puisque tout nombre réel est limite de rationnels.

(2) Soit  $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ . Alors  $\overline{A} = A \cup \{0\}$ .

(3) Un théorème de Weierstrass (voir le théorème 2.10 à la fin de ce §) affirme que toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  est limite uniforme d'une suite de polynômes. Cela peut s'exprimer en disant que si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de  $\| \cdot \|_\infty$  on a:

$$\overline{P([0, 1], \mathbb{R})} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$$

(4) L'adhérence de l'intervalle  $]0, 1[$  dans l'espace  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  est le même intervalle  $]0, 1[$  (le point 0 est bien limite d'une suite dans  $]0, 1[$ , mais il n'appartient pas à l'espace ambiant considéré  $\mathbb{R}_+$  !). Cela montre qu'il est important de savoir dans quel espace on travaille lorsqu'on considère les notions d'ouvert, fermé etc. . . , bien que souvent cela ne soit pas dit explicitement.

(5) Si  $A \subset \mathbb{R}$  est borné, alors  $\inf(A), \sup(A) \in \overline{A}$ .

La notion suivante est parfois utile.

**Définition 2.8 (Voisinages)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $a \in X$ . On dit que  $V \subset X$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$  s'il existe un ouvert  $U \subset X$  tel que  $a \in U \subset V$ .

Pour terminer ce §, citons sans preuve une proposition qui montre que l'on peut exprimer la continuité sans faire appel à la notion de distance, mais seulement en termes d'ouverts, fermés ou voisinages.

**Proposition 2.9** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $a \in X$ . On a:

(1)  $f$  continue au point  $a \Leftrightarrow \forall V$  voisinage de  $f(a)$  dans  $Y$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$ .

(2)  $f : X \rightarrow Y$  est continue  $\Leftrightarrow \forall V \subset Y$  ouvert,  $f^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X \Leftrightarrow \forall F \subset Y$  fermé,  $f^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ .

■

Par exemple, considérons la fonction

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1} & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'ensemble

$$f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon]) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2^2 < \varepsilon x_1\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

est représenté en gris sur la figure I.2. On voit que ce n'est pas un voisinage de  $(0, 0)$ , ce qui, d'après la proposition 2.9(1), montre que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

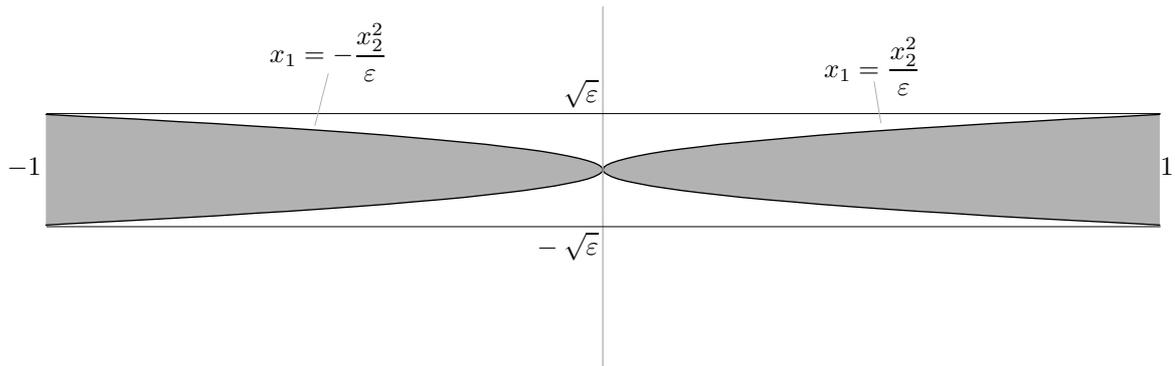


Figure I.2:  $f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$  n'est pas un voisinage de  $(0, 0)$  :  $f$  n'est donc pas continue en  $(0, 0)$

### La preuve de Bernstein du théorème d'approximation de Weierstrass

Le théorème d'approximation de Weierstrass dit que toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  peut être approchée par des polynômes. On va présenter la preuve de S.N. Bernstein (1912) de ce théorème, qui définit explicitement, en termes des valeurs de  $f$ , une suite de polynômes  $f_n(x)$  convergent uniformément vers  $f$ , pour  $x \in [0, 1]$ . Soient  $k$  et  $n$  des entiers,  $0 \leq k \leq n$ . On définit le  $k$ -ième polynôme de Bernstein de degré  $n$  par :

$$B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad , \quad k, n \geq 0 \quad , \quad k \leq n \quad , \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , son  $n$ -ième polynôme de Bernstein est défini par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad .$$

**Théorème 2.10** *La suite  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f(x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .*

Cela équivaut à dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0$ , ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \text{ (indépendant de } x) \text{ tel que } n \geq N_{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall x \in [0, 1] \quad .$$

D'abord deux lemmes; le premier donne deux propriétés fondamentales des polynômes de Bernstein.

**Lemme 2.11** *Les polynômes de Bernstein vérifient les propriétés suivantes :*

i)

$$B_n^k(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ii)

$$\sum_{k=0}^n B_n^k(x) = 1 \quad , \quad \forall n \geq 0$$

*Preuve:* i) suit du fait que  $0 \leq x \leq 1$ . Pour ii) on utilise la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où il suffit de poser  $a = x$  et  $b = 1 - x$ .

*q.e.d.*

Le deuxième lemme consiste en des calculs avec les coefficients binomiaux.

**Lemme 2.12**

i)

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n \cdot x$$

ii)

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n^2 \cdot x^2 + n \cdot x(1-x)$$

*Preuve:* Pour i) :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! (n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = n \cdot x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = n \cdot x$$

Pour ii) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! (n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n \cdot x \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \text{ (on pose } k = \ell + 1) = n \cdot x \cdot \left( \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \binom{n-1}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{n-1-\ell} \right) \\ &= n \cdot x \left( \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{n-1-\ell}}_{=(n-1) \cdot x \text{ par i)}} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{n-1-\ell}}_{=1} \right) \\ &= n \cdot x \cdot ((n-1) \cdot x + 1) = n^2 \cdot x^2 + n \cdot x \cdot (1-x) \end{aligned}$$

*Preuve du théorème :* Puisque  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $[0, 1]$  compact, d'après [4, th. III.4.5]  $f$  est uniformément continue. Donc, si  $\varepsilon > 0$  est donné, il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  (indépendant de  $x$ ) tel que

$$|x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Posons  $\delta = \delta_{\varepsilon/2}$ , de sorte que  $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$ ; soit  $M = \sup \{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$ . Alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=1} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \sum_{|x - \frac{k}{n}| \geq \delta} (f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|}_{=(I)} + \underbrace{\left| \sum_{|x - \frac{k}{n}| < \delta} (f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|}_{=(II)} \end{aligned}$$

Or :

$$(II) \leq \sum_{|x - \frac{k}{n}| < \delta} \underbrace{|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)|}_{< \varepsilon/2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon/2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon/2$$

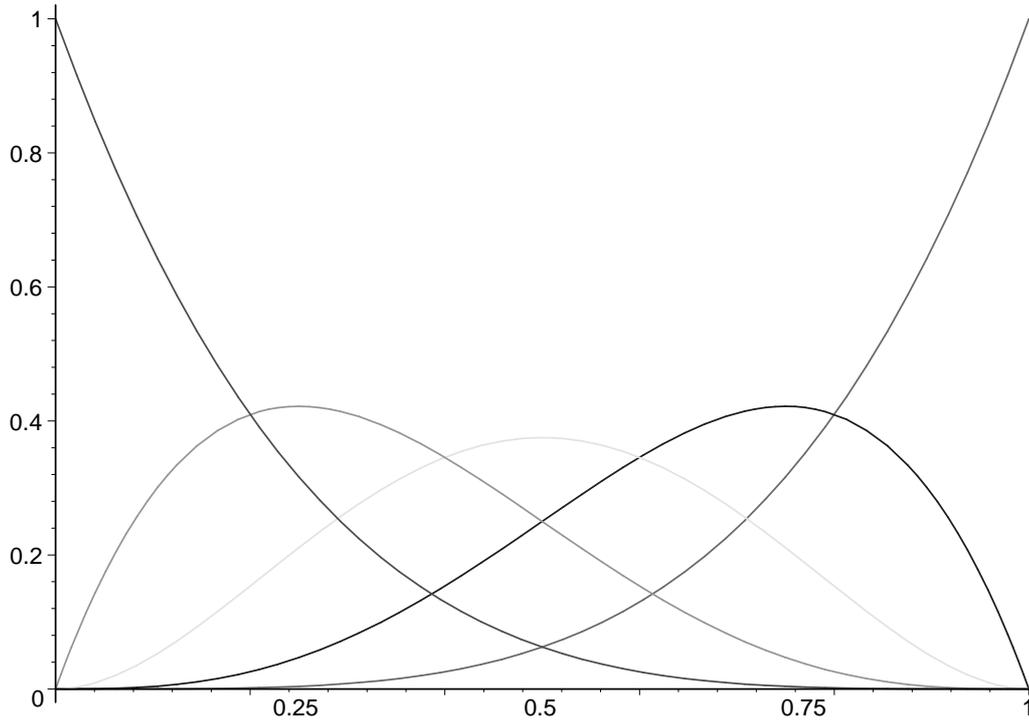


Figure I.3: Les polynômes de Bernstein de degré 4

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} &\leq 2M \cdot \sum_{|x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \sum_{k=0}^n \left( \frac{x - k/n}{\delta} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{2M}{\delta^2} \left( x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
 &\quad \text{(lemme 2.12)} = \frac{2M}{\delta^2} \left( x^2 - \frac{2x}{n} \cdot n \cdot x + \frac{1}{n^2} (n^2 \cdot x^2 + n \cdot x(1-x)) \right) = \frac{2M}{n\delta^2} \cdot x(1-x) \\
 &\quad \text{(puisque } x(1-x) \leq 1/4) \leq \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \text{(I)} + \text{(II)} < \varepsilon/2 + \frac{M}{2n\delta^2}$$

et il suffit de prendre  $n$  assez grand pour que  $\frac{M}{2n\delta^2} \leq \varepsilon/2$  pour assurer que  $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ .

*q.e.d.*

Pour comprendre intuitivement le résultat précédent, il faut étudier le polynôme  $B_n^k(x)$  : c'est un polynôme positif, qui atteint son maximum au point  $x = \frac{k}{n}$ , et dont les valeurs se rapprochent rapidement de 0 à mesure que l'on s'éloigne de  $\frac{k}{n}$  (voir figure I.3). L'expression  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k}$  peut être vue comme une moyenne pondérée des valeurs de  $f$  aux points  $\frac{k}{n}$ , où le poids de  $f(\frac{k}{n})$  est  $B_n^k(x)$ . Donc, si  $x$  est proche de  $\frac{k}{n}$ , le poids de  $f(\frac{k}{n})$  est plus grand que le poids des autres termes; cette moyenne sera donc proche de  $f(\frac{k}{n})$ , qui est proche de  $f(x)$ , puisque  $f$  est continue et que  $x$  est proche de  $\frac{k}{n}$ .

Si au lieu de l'intervalle  $[0, 1]$  on travaille avec un intervalle  $[a, b]$ , on se ramène au cas de  $[0, 1]$  par l'application  $\phi(x) = (x - a)/(b - a)$ , qui induit une bijection de  $[a, b]$  sur  $[0, 1]$ . Posons :

$$\hat{B}_n^k(x) = B_n^k(\phi(x)) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k} \quad .$$

Alors, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, la suite de polynôme  $\sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \hat{B}_n^k(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$ , pour  $x \in [a, b]$ .

### 3 Espaces complets

**Définition 3.1 (Suite de Cauchy)** On dit que la suite  $\{x_n\}$  dans l'espace métrique  $(X, d)$  est de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

On écrit alors:  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ .

**Remarque 3.2** Toute suite qui converge est de Cauchy: si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$ , cela veut dire que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et donc

$$n, m > N_{\varepsilon/2} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Par contre il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas: dans l'espace  $] -1, +1[$ , la suite  $\{1 - 1/n\}$  est une suite de Cauchy, puisque la même suite converge dans  $\mathbb{R}$  vers 1, mais  $1 \notin ] -1, +1[$ . Cet exemple peut paraître artificiel, mais la remarque 3.4 montre que ce n'est pas le cas.

Remarquons encore que 2 métriques équivalentes définissent la même notion de suite de Cauchy.

**Définition 3.3 (Espace métrique complet)** L'espace métrique  $(X, d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy dans  $X$  converge (dans  $X$ ).

L'intérêt des espaces complets est de pouvoir y représenter les éléments comme limites de suites de Cauchy. Par exemple, dans  $\mathbb{R}$  on a:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ce qui définit parfaitement le nombre  $e$  une fois que l'on a montré que  $(1 + 1/n)^n$  est une suite de Cauchy.

L'exemple par excellence d'espace complet est  $\mathbb{R}^n$ , muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes). Un des buts principaux de ce chapitre est de montrer que  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$  est complet.

**Remarque 3.4** La construction de  $\mathbb{R}$  à partir de  $\mathbb{Q}$  peut se généraliser de la façon suivante: pour tout espace métrique  $(X, d)$  on peut construire (de manière essentiellement unique) un espace  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  qui le contient, qui est complet et tel que l'adhérence de  $X$  dans  $\tilde{X}$  est égale à  $\tilde{X}$ . On appelle  $\tilde{X}$  le complété de  $X$ ; on va esquisser sa construction. On pose:

$$\tilde{X} = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \mid \{x_n\} \text{ est une suite de Cauchy} \} / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence qui identifie deux suites  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = 0$ . En désignant par  $[x_n]$  la classe d'équivalence de la suite  $\{x_n\}$ , on définit une métrique sur  $\tilde{X}$  en posant  $d([x_n], [y_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ ; on montre que cette limite existe (en utilisant que  $\mathbb{R}$  est complet!) et qu'elle ne dépend pas des représentants de  $[x_n]$  et  $[y_n]$  que l'on choisit. On définit une inclusion  $i : X \rightarrow \tilde{X}$  par  $i(x) = [x, x, \dots, x, \dots]$ . On montre enfin que  $\tilde{X}$  est complet et que l'adhérence de  $i(X)$  est égale à  $\tilde{X}$ .

**Exemple 3.5** L'espace  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$  n'est pas complet: la suite de fonctions continues

$$f_n(t) = \begin{cases} (2t)^n & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est de Cauchy pour  $\| \cdot \|_1$ , puisque

$$\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt = (1/2) \left| 1/(n+1) - 1/(m+1) \right|$$

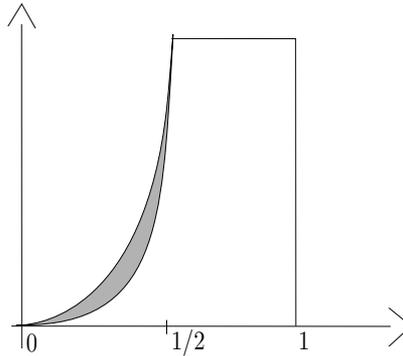


Figure I.4: L'aire hachurée représente la distance pour la norme  $\| \cdot \|_1$  entre 2 termes de la suite  $f_n(t)$

mais si  $f_n$  convergeait, sa limite  $f(t)$  devrait être nulle dans  $[0, 1/2[$ , égale à 1 dans  $[1/2, 1]$ . Cela suggère d'ailleurs que l'on pourrait compléter  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$  en considérant des fonctions plus générales que des fonctions continues.

Les exemples d'espaces complets dont nous aurons besoin par la suite seront construits à l'aide des trois propositions qui suivent, à l'exception de l'espace  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  du §5.3.

**Théorème 3.6** *Soit  $X$  un ensemble. Alors l'espace  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$  de fonctions bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}^p$  muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, x \in X\}$  est complet, où  $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^p}$  est l'une des normes équivalentes sur  $\mathbb{R}^p$ .*

*Preuve:* Soit  $\{f_n\}$  une suite de Cauchy. Pour tout  $x \in X$  fixé, la suite des valeurs correspondantes:  $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}^p$  est de Cauchy, et comme  $\mathbb{R}^p$  est complet, elle admet une limite. On définit l'application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  en posant:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)).$$

C'est un bon candidat pour la limite de la suite  $f_n$ . Le reste de la preuve consiste à montrer que:

- (1)  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$  (c'est-à-dire:  $f$  est bornée).
- (2) La suite  $f_n$  tend vers  $f$  au sens de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  (c'est-à-dire la convergence de  $f_n$  vers  $f$  a lieu non seulement point par point, mais uniformément sur  $X$ ).

(1) Utilisons l'hypothèse que  $f_n$  est de Cauchy avec  $\varepsilon = 1$ :

$$\exists N_1 \text{ tel que } n, m \geq N_1 \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^p} < 1, \forall x \in X.$$

Puisque  $f_{N_1} : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  est bornée,  $\exists M$  tel que  $\|f_{N_1}(x)\| \leq M, \forall x \in X$ , d'où :

$$\|f_m(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|f_m(x) - f_{N_1}(x)\| + \|f_{N_1}(x)\| < 1 + M, \forall x \in X, m \geq N_1$$

et donc  $f(x) \leq 1 + M$  et  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$ . (2) Soit  $\varepsilon > 0$  et  $x \in X$ . Puisque  $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\exists N_{\varepsilon, x}^1$  tel que

$$k \geq N_{\varepsilon, x}^1 \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Pour ce  $\varepsilon$ ,  $\exists N_\varepsilon^2$  tel que

$$k, \ell > N_\varepsilon^2 \Rightarrow \|f_k(x) - f_\ell(x)\| < \varepsilon \forall x \in X$$

puisque la suite d'applications  $\{f_k\}$  est de Cauchy. Donc, si  $\ell \geq N_\varepsilon^2$  et  $k \geq \sup \{N_{x, \varepsilon}^1, N_\varepsilon^2\}$  on a:

$$\|f_\ell(x) - f(x)\| \leq \|f_\ell(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon + \varepsilon$$

et finalement

$$\ell \geq N_\varepsilon^2 \Rightarrow \|f_\ell(x) - f(x)\|_\infty < 2\varepsilon \forall x \in X$$

*q.e.d.*

**Proposition 3.7** Soit  $X$  un espace complet et  $A \subset X$ . On a :

$$A \text{ est complet} \Leftrightarrow A \text{ est fermé} .$$

*Preuve:* Si  $A \subset X$  est complet et  $\{a_n\} \subset A$  est une suite qui converge vers  $x \in X$ , alors  $\{a_n\}$  est une suite de Cauchy (puisque dans  $X$  elle converge). Mais alors elle doit converger dans  $A$ , puisque celui-ci est complet, donc  $x \in A$ . C'est dire que  $A$  est fermé dans  $X$ . Notez que jusqu'ici l'on n'a pas utilisé le fait que  $X$  est complet.

Si  $A \subset X$  est fermé, toute suite de Cauchy  $\{a_n\} \subset A$  doit converger dans  $X$ , puisque celui-ci est complet. Mais puisque  $A$  est fermé, cette limite doit appartenir à  $A$ , ce qui prouve que  $A$  est complet. *q.e.d.*

**Proposition 3.8** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact. Alors le sous-espace  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  de  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  est fermé pour la norme  $\| \cdot \|_\infty$ .

*Preuve:* Il s'agit de voir qu'une suite d'applications continues qui converge uniformément dans  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  a pour limite une fonction continue. Soit donc  $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  une suite qui converge uniformément vers  $f \in \mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  et soient  $x, x_0 \in K$ . On a :

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|$$

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $N_\varepsilon$  tel que :

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \text{ et } \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

puisque la suite converge au sens de  $\| \cdot \|_\infty$ . Il existe aussi un  $\delta_{n,\varepsilon}$  tel que

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_{n,\varepsilon} \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon$$

puisque  $f_n$  est continue. Donc

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_{N_\varepsilon, \varepsilon} = \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < 3\varepsilon$$

*q.e.d.*

**Corollaire 3.9** Soit  $K \subset \mathbb{R}^p$  compact. Alors  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  muni de la métrique induite par  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  (i.e. convergence uniforme) est complet ■.

**Corollaire 3.10** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact et  $F \subset \mathbb{R}^p$  fermé. Alors le sous-espace de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  :

$$\mathcal{C}(K, F) = \{f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p) \mid f(x) \in F \forall x \in K\}$$

est complet.

*Preuve:* Il suffit de montrer que ce sous-espace est fermé. Or si  $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(K, F)$  est une suite d'applications ayant pour limite  $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$ , on a

$$\forall x \in K, \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) = f(x) \in F$$

puisque  $F$  est fermé, et donc  $f \in \mathcal{C}(K, F)$ .

*q.e.d.*

## 4 Le théorème du point fixe et premières applications

Le théorème qui suit sera utilisé pour la construction de solutions d'équations de toutes sortes.

**Théorème 4.1** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit  $T : X \rightarrow X$  une application pour laquelle il existe  $q \in \mathbb{R}$ ,  $0 < q < 1$ , tel que

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors il existe un unique point  $\omega \in X$ , tel que:

$$T(\omega) = \omega.$$

De plus, si l'on note par  $T^n(x) = \underbrace{T(T(\dots T(x)\dots))}_{n\text{-fois}}$  l'image de  $x$  par le  $n$ -ième itéré de  $T$ , on a:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x)) \quad \forall x \in X$$

et la vitesse de la convergence peut être estimée par:

$$d(\omega, T^n(x)) \leq d(x, T(x)) \frac{q^n}{1-q}.$$

Une application qui satisfait les hypothèses de **4.1** est appelée une transformation contractante et  $q$  est appelée une constante de contraction. Une telle application est uniformément continue:

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{q} \Rightarrow d(T(x), T(y)) < q \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon$$

et on a même l'expression explicite  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{q}$ .

Un point  $\omega \in X$  tel que  $T(\omega) = \omega$  est appelé point fixe de  $T$ .

*Preuve du théorème:* Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont des points fixes, alors

$$d(\omega, \omega') = d(T(\omega), T(\omega')) \leq q d(\omega, \omega')$$

ce qui n'est possible que si  $d(\omega, \omega') = 0$ , c'est-à-dire  $\omega = \omega'$  et donc il y a au plus un point fixe.

Montrons que si  $x \in X$ , la suite  $\{T^n(x)\} \subset X$  est de Cauchy. Notons pour commencer que si  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$d(T^{\ell+1}(x), T^\ell(x)) \leq qd(T^\ell(x), T^{\ell-1}(x)) \leq \dots \leq q^\ell d(T(x), x).$$

Pour  $n, k \in \mathbb{N}$  on a:

$$\begin{aligned} d(T^{n+k}(x), T^n(x)) &\leq d(T^{n+k}(x), T^{n+k-1}(x)) + d(T^{n+k-1}(x), T^{n+k-2}(x)) + \dots + d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \\ &\leq d(T(x), x) q^n (1 + q + \dots + q^{k-1}) < d(T(x), x) \frac{q^n}{1-q} \quad (\#) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient en remplaçant la série géométrique finie  $1 + q + \dots + q^{k-1}$  de raison  $q$  par la série infinie, dont la somme vaut  $1/(1-q)$ . On voit que si  $n \rightarrow \infty$ ,  $d(T^{n+k}(x), T^n(x)) \rightarrow 0$  et donc la suite  $T^n(x)$  est de Cauchy, et par conséquent elle converge vers une limite que nous appellerons  $\omega$ , dont nous allons montrer que c'est un point fixe de  $T$ . D'abord, remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n+1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x)).$$

Ensuite, le fait que  $T$  est contractante entraîne qu'elle est continue, et donc:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n+1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T(T^n(x))) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x))) = T(\omega).$$

Enfin, si dans l'inégalité (#) on fait tendre  $k$  vers  $l^\infty$ , on voit que:

$$d(\omega, T^n(x)) \leq d(T(x), x) \frac{q^n}{1-q}$$

*q.e.d.*

L'exemple suivant est une application typique du théorème du point fixe et des notions développées dans ce chapitre. Soit  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue pour laquelle il existe  $q \in \mathbb{R}$  vérifiant  $0 < q < 1$ , tel que  $|K(x, t)| \leq q$ ,  $\forall x, t \in [0, 1]$ , et soit  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On aimerait trouver une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue satisfaisant l'équation intégrale suivante (équation de Fredholm):

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^1 K(x, t)f(t)dt.$$

Cela se ramène facilement à la recherche d'un point fixe en définissant  $T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  par:

$$T(g)(x) = \phi(x) + \int_0^1 K(x, t)g(t)dt.$$

On vérifie sans peine que:

- (1)  $T$  est une transformation, c'est-à-dire que si  $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $T(g) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .
- (2)  $T$  est contractante si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ , de constante de contraction  $q$ .

Puisque d'après **3.9** ( $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $\| \cdot \|_\infty$ ) est complet, on peut appliquer le théorème **4.1**, qui implique que l'équation intégrale ci-dessus possède une et une seule solution et nous fournit une méthode pour approcher cette solution: on peut par exemple itérer  $T$  sur la fonction 0. En particulier, dans le cas où  $\phi \equiv 0$ , l'unique solution est  $f \equiv 0$ .

### La méthode de Newton

Un autre exemple d'application de **4.1** nous est fourni par la méthode de Newton pour la recherche de racines de polynômes (ou plus généralement de fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ), dont nous présentons maintenant deux variantes.

**Proposition 4.2** Soit  $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Supposons que  $f'(x_0) \neq 0$  et qu'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < q < 1$  et que:

$$(1) \quad \left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| \leq q \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$(2) \quad \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq r(1 - q).$$

Alors  $f$  possède une unique racine  $\omega$  dans  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . De plus, pour tout  $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , la suite  $x_n$  définie récursivement par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 1$$

a pour limite  $\omega$ . Enfin, la vitesse de convergence de  $\{x_n\}$  est estimée par

$$|x_n - \omega| \leq \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} \right| \frac{q^{n-1}}{1-q}$$

et si l'on prend  $x_1 = x_0$  :

$$|x_n - \omega| \leq r q^{n-1}.$$

Notons que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (c'est-à-dire à dérivée continue) les hypothèses de cette proposition seront satisfaites si  $x_0$  est suffisamment proche d'une racine  $\omega$  de  $f$  en laquelle la dérivée de  $f$  est non nulle et si  $r$  est assez petit.

*Preuve:* Posons:

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

et vérifions que  $t$  est une transformation contractante de  $[x_0 - r, x_0 + r]$  de constante de contraction  $q$ ; le résultat suivra alors de **4.1**, puisque  $t(x) = x$  équivaut à  $f(x) = 0$ . On a:

$$t'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}$$

et donc si  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ,  $|t'(x)| \leq q$ . On déduit alors du théorème des accroissements finis (voir [4, chap. III.6.11]) que

$$\forall x, y \in [x_0 - r, x_0 + r], x < y, \quad \exists \xi \in [x, y] \text{ tel que } t(x) - t(y) = t'(\xi)(x - y)$$

et donc

$$|t(x) - t(y)| \leq q|x - y|$$

à cause de l'hypothèse (1).

Si  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ,

$$|t(x) - x_0| \leq |t(x) - t(x_0)| + |t(x_0) - x_0| \leq q \cdot r + r \cdot (1 - q) = r$$

à cause de la première partie de la preuve et de l'hypothèse (2). Cela prouve bien que  $t$  est une transformation contractante de  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , et en fait  $x_n = t^{n-1}(x_1)$  et  $x_1 - t(x_1) = f(x_1)/f'(x_0)$ . Les affirmations suivent alors de **4.1**.

*q.e.d.*

**Proposition 4.3 (Variante de la proposition précédente)** *Soit  $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$  une application deux fois dérivable. Supposons que  $f'(x) \neq 0$ ,  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$  et qu'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < q < 1$  et que:*

$$(1) \quad \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq q \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$(2) \quad \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq r(1 - q).$$

Alors  $f$  possède une unique racine  $\omega$  dans  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . De plus, pour tout  $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , la suite  $x_n$  définie récursivement par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a pour limite  $\omega$ . On a

$$|x_n - \omega| \leq \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \frac{q^{n-1}}{1 - q}$$

et si l'on prend  $x_1 = x_0$  alors

$$|x_n - \omega| \leq r q^{n-1}$$

*Preuve:* On reprend le schéma de la preuve précédente avec  $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Ici on a:

$$t'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

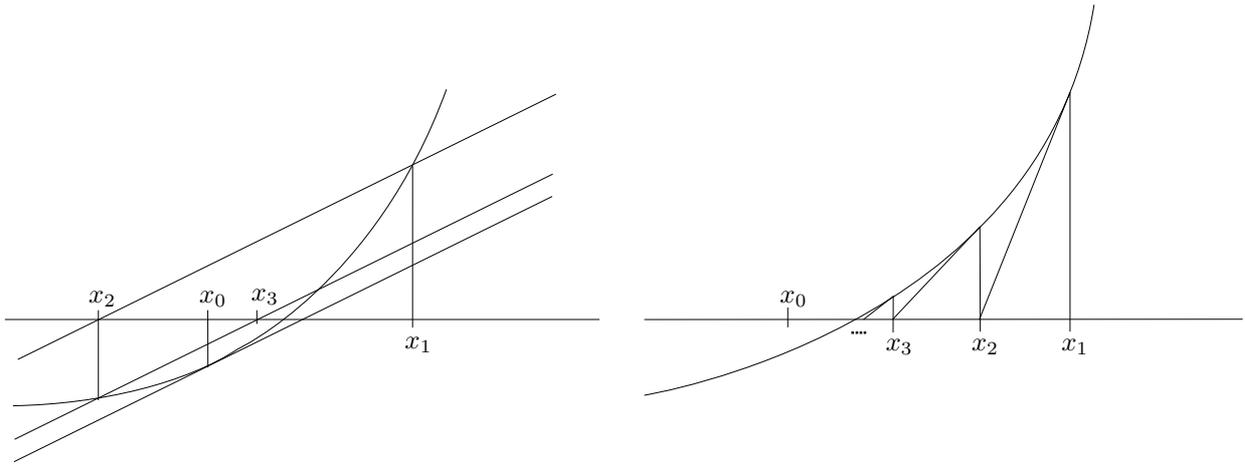


Figure I.5: Méthode de Newton selon 4.2 et selon 4.3

et l'hypothèse (1) nous assure alors que  $t$  est contractante. Le fait que  $t$  est une transformation de  $[x_0 - r, x_0 + r]$  se montre comme dans la proposition précédente.

*q.e.d.*

Par exemple, calculons la racine de 2 à l'aide des propositions qui précèdent. On pose  $f(x) = x^2 - 2$  et le problème est de calculer la racine positive de  $f$ . On commence par faire un bon choix pour  $x_0$  et  $r$ :

$$x_0 = 3/2 \quad , \quad r = \frac{1}{2} .$$

Alors

$$\left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{3 - 2x}{3} \right| \leq \frac{1}{3}$$

et d'autre part

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \frac{1}{12} ;$$

on peut donc prendre  $q = 1/3$ . On doit itérer la fonction

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} = \frac{3x - x^2 + 2}{3}$$

On commence l'itération avec  $x_1 = x_0 = 3/2$  et on obtient

$$x_2 = \frac{17}{12} (= 1,416\dots = 1,41\overline{6}), \quad x_3 = \frac{611}{432} (= 1,4143\overline{518}), \quad \text{etc}\dots$$

L'estimation de la convergence donne  $|x_n - \sqrt{2}| \leq (1/2)(1/3)^{n-1}$ .

Essayons maintenant avec la variante, en prenant toujours  $x_0 = 3/2$ ,  $r = 1/2$ . On doit itérer la fonction

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

On vérifie que

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

et que

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \frac{1}{12} .$$

On peut donc prendre  $q = 1/2$ . L'estimation de la convergence donne  $|x_n - \sqrt{2}| \leq (1/2)^n$ . En partant de  $x_1 = 3/2$  on obtient:

$$x_2 = \frac{17}{12} (= 1,41\bar{6}), x_3 = \frac{577}{408} (= 1,4142156862745098039), \text{ etc...}$$

### Equations intégrales de Volterra

D'abord on va étendre un peu les possibilités d'applications du théorème 4.1.

**Proposition 4.4** *Soit  $X$  un espace métrique complet et  $T : X \rightarrow X$  une transformation telle qu'il existe un entier positif  $N$  tel que la  $N$ -ième itérée  $T^N$  de  $T$  soit contractante. Alors  $T$  admet un et un seul point fixe  $\omega$ , et  $\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x)) = \omega$ .*

*Preuve:* On peut appliquer 4.1 à  $T^N$ , et donc  $T^N$  possède un unique point fixe  $\omega$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n \cdot N}(x) = \omega, \forall x \in X$ . Mais alors:

$$T^N(T(\omega)) = T^{N+1}(\omega) = T(T^N(\omega)) = T(\omega)$$

et on voit  $T(\omega)$  est aussi point fixe de  $T^N$ , donc  $T(\omega) = \omega$ . Ce point fixe de  $T$  est unique, car tout point fixe de  $T$  est aussi point fixe de  $T^N$ . Il reste à voir que  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x), \forall x \in X$ . Soit donc  $x \in X$ ; on sait que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{k \cdot N}(T^\ell(x)) = \omega, \ell = 0, \dots, N-1$  et donc

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon^\ell, \ell = 0, \dots, N-1 \text{ tels que } k \geq K_\varepsilon^\ell \Rightarrow d(T^{k \cdot N}(T^\ell(x)), \omega) < \varepsilon \quad ;$$

posons  $K_\varepsilon = \sup \{K_\varepsilon^0, \dots, K_\varepsilon^{N-1}\}$ . Alors, si  $n \geq N \cdot K_\varepsilon$ , par division euclidienne  $n$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$n = k \cdot N + r \quad , \quad \text{avec } 0 \leq r \leq N-1$$

et  $n \geq N \cdot K_\varepsilon \Rightarrow k \cdot N + r \geq N \cdot K_\varepsilon \Rightarrow k \geq K_\varepsilon - r/N \Rightarrow k \geq K_\varepsilon$ , puisque  $k$  est entier et  $r/N < 1$ , et donc

$$d(T^n(x), \omega) = d(T^{k \cdot N}(T^r(x)), \omega) < \varepsilon \quad .$$

*q.e.d.*

Un exemple de transformation non contractante, dont un itéré est une application contractante : on prend l'application linéaire  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  n'est visiblement pas contractante, puisqu'elle envoie le 2-ème vecteur de base sur un vecteur de longueur 100, mais  $A^2 = 0$  est tout ce qu'il y a de plus contractant.

Un exemple plus substantiel nous est fourni par les équations intégrales de Volterra. On se donne les fonctions  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues. On cherche une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, t) f(t) dt .$$

C'est dire qu'on cherche un point fixe de la transformation

$$T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), T(g)(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, t) g(t) dt .$$

Nous allons montrer par induction sur  $n$  que

$$|T^n(g_1)(x) - T^n(g_2)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty ,$$

où  $M = \sup \{|K(x, t)|, x, t \in [0, 1]\}$ . Pour  $n = 1$  cette inégalité se vérifie facilement. Supposons-la vraie pour  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} |T^{n+1}(g_1)(x) - T^{n+1}(g_2)(x)| &= |T(T^n(g_1))(x) - T(T^n(g_2))(x)| \\ &\leq \int_0^x |K(x, t)| |T^n(g_1)(t) - T^n(g_2)(t)| dt \leq \int_0^x M \frac{t^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M^{n+1} \|g_1 - g_2\|_\infty . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|T^n(g_1) - T^n(g_2)\|_\infty \leq \frac{M^n}{n!} \|g_1 - g_2\|_\infty$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n/n! = 0$ , si on choisit  $q$ ,  $0 < q < 1$ , il existe  $N$  tel  $M^N/N! \leq q$  et alors  $T^N$  sera contractante, de constante de contraction  $q$ . On peut donc affirmer que l'équation intégrale dont on est parti admet une unique solution, que l'on peut obtenir par itération de  $T$ .

## 5 Construction de fractals par la méthode des IFS (Iterated Function Systems)

Les objets fractals ont été étudiés pour la première fois de façon systématique en 1975 par Benoît Mandelbrot [5]. Ce sont des sous-ensembles du plan, de l'espace ou plus généralement de  $\mathbb{R}^n$  qui ont comme propriété caractéristique d'être d'un aspect compliqué, alors qu'ils sont définis par des règles très simples.

Il n'existe pas de définition précise de la notion de fractal; deux approches sont possibles, l'une disant qu'un objet fractal est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de dimension de Hausdorff non entière (mais tous les exemples usuels sont de dimension un nombre qui n'est pas non plus une fraction), l'autre disant qu'un fractal est réunion de sous-ensembles qui sont des fractions de lui-même.

Ces deux points de vue sont d'ailleurs liés, et c'est ce qui nous permettra de calculer la dimension (au sens de Hausdorff) de ces fractals. Cette dimension est une extension de la notion que nous connaissons intuitivement; elle tient compte du degré de complexité du fractal en tant que sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

L'approche que nous allons présenter pour définir et construire les fractals est basée sur le théorème du point fixe (théorème 4.1). Elle a été introduite par M.F. Barnsley et A.D. Sloan [1], qui l'ont utilisée pour développer une méthode de compression d'images.

### 5.1 Exemples d'objets fractals

#### L'intervalle

Le tout premier exemple nous est fourni par l'intervalle  $[0, 1]$  : il est réunion des 2 intervalles  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ . Si  $w_1(x) = 1/2x$  et  $w_2(x) = 1/2(x - 1) + 1$  sont les homothéties de rapport  $1/2$  et centre respectivement 0 et 1, on peut dire que

$$[0, 1] = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) \quad ;$$

c'est dire que  $[0, 1]$  est réunion de deux "moitiés" de lui-même.

#### L'ensemble de Cantor (1872)

C'est un sous-ensemble  $C \subset \mathbb{R}$  défini ainsi : on partage l'intervalle  $[0, 1]$  en trois intervalles égaux et on enlève l'intervalle ouvert du milieu  $]1/3, 2/3[$ ; puis on recommence avec les deux intervalles  $[0, 1/3]$  et  $[1/3, 2/3]$ , et ainsi de suite. Plus précisément, si l'on pose :

$$C_0 = [0, 1] \quad , \quad C_1 = C_0 \setminus ]1/3, 2/3[ \quad , \quad C_{k+1} = C_k \setminus M_k$$

où  $M_k$  est la réunion des  $2^{k-1}$  intervalles ouverts qui sont les tiers du milieu des intervalles dont  $C_k$  est réunion, alors

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \quad .$$

Soient  $w_1(x) = 1/3x$  et  $w_2(x) = 1/3x + 2/3$  les homothéties de rapport  $1/3$  et de centre respectivement 0 et 1. Alors on a :

$$C = w_1(C) \cup w_2(C) \quad .$$

On voit donc que  $C$  est réunion de deux copies réduites de lui-même.



Figure I.6: Construction de l'ensemble de Cantor

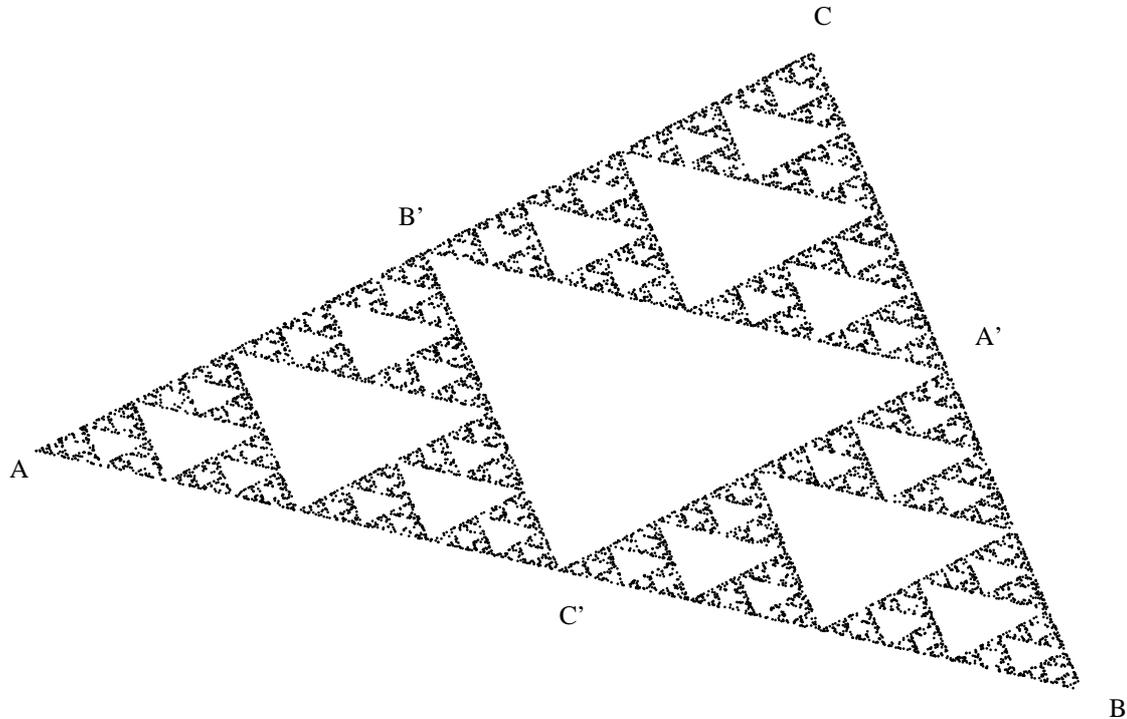


Figure I.7: Le triangle de Sierpinski, dessiné à l'aide de la méthode des I.F.S.

### Le triangle de Sierpinski (1916)

Tout d'abord, si  $P \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , notons par  $w_P^\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'homothétie de centre  $P$  et rapport  $\lambda$ . Explicitement :

$$w_P^\lambda(x) = (\lambda(x - P) + P) \quad .$$

Le triangle de Sierpinski est un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{R}^2$  qui est obtenu ainsi : On part d'un triangle de sommets  $A, B, C$ , dont on prend les milieux  $A', B'$  et  $C'$  des côtés  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{AB}$  respectivement. Si on enlève l'intérieur du triangle de sommets  $A', B', C'$ , il reste trois triangles, dont les dimensions sont la moitié de celles du triangle  $ABC$  :  $A'B'C$ ,  $A'C'B$  et  $B'C'A$ . On recommence avec ces 3 nouveaux triangles, et ainsi de suite. Si  $P \in \mathbb{R}^2$ , désignons par  $w_P^\lambda$  l'homothétie de centre  $P$  et de rapport  $\lambda$ ; on voit que

$$S = w_A^{1/2}(S) \cup w_B^{1/2}(S) \cup w_C^{1/2}(S) \quad .$$

### La courbe de von Koch (1904)

On part du segment  $[0, 1]$ , que l'on partage en trois segments égaux. On construit un triangle équilatéral sur le segment du milieu, et on enlève l'intérieur de ce même segment. On obtient ainsi 4 nouveaux segments, et on recommence la construction précédente sur chacun d'entre eux.

Appelons  $K$  le résultat de cette construction; on voit que

$$K = w_{(0,0)}^{1/3}(K) \cup w_{(1,0)}^{1/3}(K) \cup w_3(K) \cup w_4(K)$$

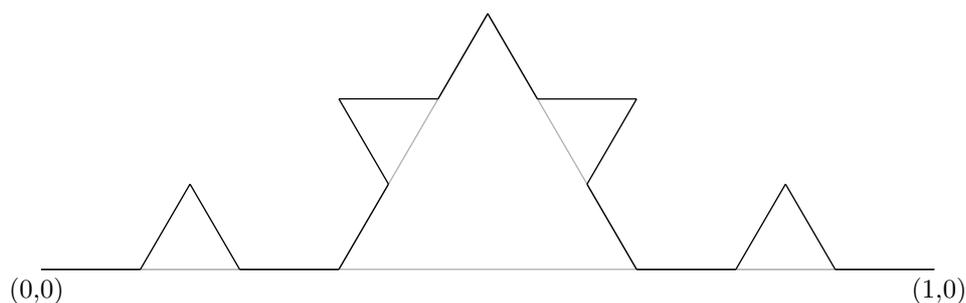


Figure I.8: Construction de la courbe de Von Koch

où  $w_3$  est la rotation de  $\pi/3$  centrée en  $(0,0)$  suivie de l'homothétie de centre  $(0,0)$  et rapport  $1/3$ , puis de la translation par  $(1/3,0)$ ;  $w_4$  est la rotation d'angle  $-\pi/3$  centrée en  $(1,0)$ , suivie de l'homothétie de centre  $(1,0)$  et rapport  $1/3$ , puis de la translation par  $(-1/3,0)$ .

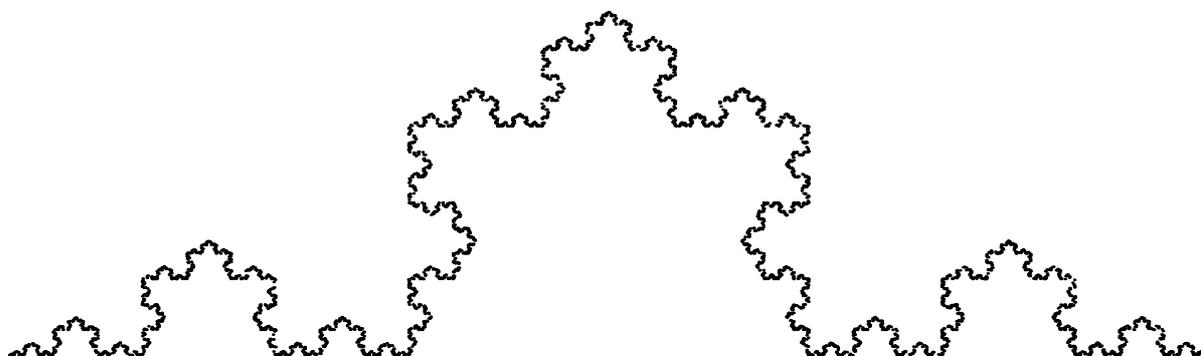


Figure I.9: La courbe de Von Koch, dessinée à l'aide de la méthode des I.F.S.

## 5.2 La dimension de Hausdorff (1918)

Essayons de saisir, au moins intuitivement, la notion de dimension d'un objet, pour ensuite calculer les dimensions des exemples ci-dessus. Si l'on fait subir à un objet de dimension  $s$  une homothétie de rapport  $\lambda$ , sa mesure  $\mu_s$  sera multipliée par  $\lambda^s$ :

- la longueur d'une courbe sera multipliée par  $\lambda$ .
- l'aire d'une surface sera multipliée par  $\lambda^2$ .
- un volume sera multiplié par  $\lambda^3$ .

D'autre part, la mesure d'un tel objet (longueur, aire, volume, etc...) sera invariante par translation et rotation. Donc, si un compact  $A \subset \mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme:

$$A = w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

où les  $w_i$  sont composées de rotations, translations et homothéties, toutes de même rapport  $\lambda$ , et que les intersections  $w_i(A) \cap w_j(A)$  sont de mesure négligeable, pour  $i \neq j$ , on aura:

$$\spadesuit \quad \mu_s(A) = \mu_s(w_1(A)) + \dots + \mu_s(w_N(A)) = N\lambda^s \mu_s(A)$$

d'où l'on tire que

$$s = \dim(A) = \frac{\log(N)}{\log(1/\lambda)}.$$

Dans le cas de l'ensemble de Cantor  $C$ , on trouve donc:

$$\dim(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309297534\dots$$

Pour le triangle de Sierpinski  $S$ :

$$\dim(S) = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.584962501\dots$$

et pour la courbe de Von Koch :

$$\dim(K) = \frac{\log(4)}{\log(3)}$$

Notons que le segment  $[0, 1]$  est lui aussi "fractal" : il est réunion des deux moitiés de lui-même  $: [0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ .

Cette approche n'est pas rigoureuse, parce qu'il se pourrait que dans  $\spadesuit \mu_s(A)$  soit infinie.

Nous allons donner la définition rigoureuse de la dimension au sens de Hausdorff d'un sous-ensemble  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Pour simplifier, nous supposons que  $A$  est borné. D'abord, définissons l'hypercube de côté  $\ell$  et de centre  $a = (a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$P(a, \ell) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - a_i| \leq \ell/2\}$$

Soit  $\delta > 0$ ; un  $\delta$ -recouvrement de  $A$  est un ensemble fini  $\{P(a^i, \ell_i)\}_{i \in I}$  d'hypercubes tels que :

$$\ell_i \leq \delta \quad \text{et} \quad A \subset \cup_{i \in I} P(a^i, \ell_i)$$

Soit  $s \geq 0$ ; on pose :

$$\mu_s^\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \ell_i^s \quad \text{où} \quad \cup_{i \in I} P(a^i, \ell_i) \supset A \quad \text{et} \quad \ell_i \leq \delta \right\}$$

Remarquons que si  $\delta' < \delta$ , tout  $\delta'$ -recouvrement est aussi un  $\delta$ -recouvrement, et donc :

$$\delta' < \delta \Rightarrow \mu_s^\delta(A) \leq \mu_s^{\delta'}(A)$$

On pose

$$\mu_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mu_s^\delta(A))$$

que l'on appelle  $s$ -mesure de  $A$ . Cette limite existe, puisque  $\mu_s^\delta$  est décroissant en  $\delta$ , et  $0 \leq \mu_s(A) \leq \infty$ .

Supposons que  $s > n$ ; puisque  $A$  est borné, il existe  $L$  telque  $A \subset P(0, L)$ . Alors, pour tout  $\delta > 0$ , on prend  $N \in \mathbb{N}$  assez grand pour que  $L/N \leq \delta$  et on partage  $P(0, L)$  en  $N^n$  cubes égaux de côté  $L/N$ ; ces cubes recouvrent  $A$ , et donc :

$$\mu_s^\delta(A) \leq N^n \left( \frac{L}{N} \right)^s = L^s \cdot N^{n-s}$$

Or, si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  et, puisque  $n - s < 0$ ,  $N^{n-s} \rightarrow 0$ ; on en déduit que  $\mu_s(A) = 0$  si  $s > n$ .

On peut donc définir ainsi la dimension de Hausdorff de  $A$  par :

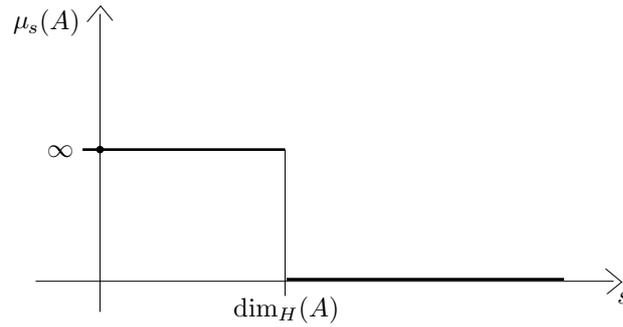
$$\dim_H(A) = \inf \{s \mid \mu_s(A) = 0\}$$

et on aura que  $\dim_H(A) \leq n$ .

**Proposition 5.1** *Supposons  $t > s$  ;*

*i) Si  $\mu_s(A) < \infty$ , alors  $\mu_t(A) = 0$*

*ii) si  $\mu_t(A) > 0$ , alors  $\mu_s(A) = \infty$ .*

Figure I.10: Comportement de la  $s$ -mesure de  $A$  selon les valeurs de  $s$ 

*Preuve:* Si  $A \subset \cup_{i \in I} P(a^i, \ell_i)$ ,  $\ell_i \leq \delta$ , puisque  $t - s > 0$ ,  $\ell_i \leq \delta \Rightarrow \ell_i^{t-s} \leq \delta^{t-s}$  et donc on a :

$$\sum_{i \in I} \ell_i^t = \sum_{i \in I} \ell_i^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in I} \ell_i^s$$

d'où il vient :

$$\mu_t^\delta(A) \leq \delta^{t-s} \mu_s^\delta(A) \quad (\#)$$

Si  $\mu_s(A) < \infty$ , il suit de (#) que si  $\delta \rightarrow 0$ , alors  $\mu_t^\delta(A) \rightarrow 0$ .

Si  $\mu_t(A) > 0$ , alors il suit de (#) que si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\mu_s(A) \rightarrow \infty$ .

*q.e.d.*

Posons  $\mu_s(A) = \infty$  si  $s < 0$ ; on déduit de **5.1** que

$$\dim_H(A) = \inf \{s \mid \mu_s(A) = 0\} = \sup \{s \mid \mu_s(A) = \infty\} \quad .$$

Intuitivement, on a défini cette mesure  $\mu_s(A)$  en approchant  $A$  par des hypercubes, dont on calcule le volume en imaginant qu'ils sont de dimension  $s$ , puisque on le pose égal à  $\ell^s$ , où  $\ell$  est la longueur du côté. Si  $s$  est trop grand par rapport à la vraie dimension de  $A$ ,  $\mu_s(A)$  sera nul, alors que si  $s$  est trop petit  $\mu_s(A)$  sera infini. La dimension sera donc l'infimum des  $s$  trop grands, ou encore le supremum des  $s$  trop petits.

Par exemple, prenons  $A = [0, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire l'intervalle  $[0, 1]$  vu comme sous-ensemble du plan. Pour calculer  $\mu_s(A)$ , on peut montrer qu'il suffit de considérer les recouvrements constitués par  $n$  carrés de côté  $\delta = 1/n$  et de centre  $\frac{2i-1}{2n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; leur  $s$ -mesure vaut

$$n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^s = n^{1-s}$$

Puis on fait tendre  $n \rightarrow \infty$ . On voit que

$$n^{1-s} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } s > 1 \\ \infty & \text{si } s < 1 \\ 1 & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

et donc la dimension de Hausdorff de  $A$  vaut 1.

Remarquons enfin que, si  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la dimension  $\dim_H(A)$  dépend en réalité de la paire  $(A, \mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire de la façon dont  $A$  est plongé dans  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, on peut montrer que la courbe de Von Koch, qui est de dimension  $> 1$ , est homéomorphe au segment  $[0, 1]$ , qui est de dimension 1.

### 5.3 L'espace métrique complet $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$

Nous noterons par  $\|x\|$  la norme euclidienne et par  $d(x, y)$  la distance euclidienne,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Rappelons (voir [4, IV.1.18]) qu'un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dit compact si de toute suite de points dans  $A$  on peut extraire une sous-suite qui converge; on montre ([4, th. IV.1.19]) que cela équivaut à supposer que  $A$  est fermé et borné. Si une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue,  $A \subset \mathbb{R}^n$  compact, non vide, alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes ([4, th. IV.2.3].)

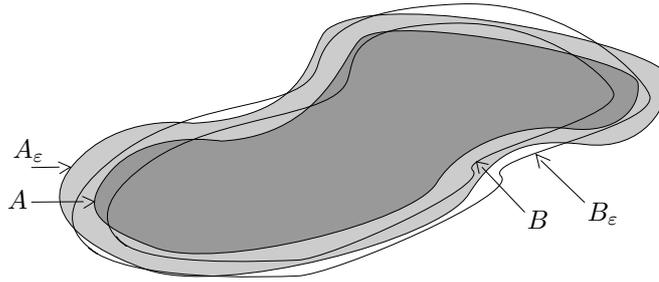


Figure I.11: La distance de Hausdorff de  $A$  à  $B$  est inférieure à  $\varepsilon$

**Définition 5.2** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  non vide et  $x \in \mathbb{R}^n$ . On définit la distance de  $x$  à  $A$  par :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\} \quad .$$

Notons que, puisque  $d(x, y) \geq 0$ , cet infimum existe.

Si  $A$  est vide, la définition précédente n'a pas de sens.

Si  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  sont compacts, ils sont bornés, et il existe alors  $R$  tel que si  $x \in K \cup L$ ,  $\|x\| \leq R$ . Alors, si  $x \in K$  et  $y \in L$ ,  $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2R$ , et donc pour tout  $x \in K$ ,  $d(x, L) \leq 2R$ . Il en suit que les nombres réels

$$\sup \{d(x, L), x \in K\} \quad \text{et} \quad \sup \{d(y, K), y \in L\}$$

sont bien définis.

**Définition 5.3 (Distance de Hausdorff)** Soient  $K$  et  $L$  deux sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^n$ . On définit la distance de Hausdorff de  $K$  et  $L$  par :

$$d_H(K, L) = \max \{ \sup \{d(x, L) \mid x \in K\}, \sup \{d(y, K) \mid y \in L\} \}$$

Dire que  $K$  et  $L$  sont proches signifie que tout point de  $K$  est proche de  $L$  et tout point de  $L$  est proche de  $K$ ; la proposition suivante, dont la preuve est une conséquence facile des définitions, précise cette affirmation. D'abord une notation : si  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$ ; on appelle  $A_\varepsilon$  un  $\varepsilon$ -épaissement de  $A$ .

**Proposition 5.4** Soient  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  compacts, non vides. Alors

$$d_H(K, L) \leq \varepsilon \Leftrightarrow K \subset L_\varepsilon \text{ et } L \subset K_\varepsilon$$

et  $d_H(K, L) = \inf \{\varepsilon \mid K \subset L_\varepsilon \text{ et } L \subset K_\varepsilon\}$  (voir figure I.11.)

*Preuve:* En effet, pour que  $K \subset L_\varepsilon$ , la plus petite valeur possible que l'on peut prendre pour  $\varepsilon$  est  $\sup \{d(x, L), x \in K\}$ .

*q.e.d.*

**Exemple 5.5** Prenons pour  $A \subset \mathbb{R}^2$  le cercle unité centré à l'origine et pour  $B$  le carré qui lui est circonscrit. Les points de  $A$  qui sont le plus éloignés de  $B$  sont les 4 points  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$  et leur distance à  $B$  vaut  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Les points de  $B$  les plus éloignés de  $A$  sont les 4 sommets du carré, et leur distance à  $A$  vaut  $\sqrt{2} - 1$  :

$$\sup \{d(x, B) \mid x \in A\} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sup \{d(y, A) \mid y \in B\} = \sqrt{2} - 1$$

on vérifie que  $\sqrt{2} - 1 > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ , d'où  $d_H(A, B) = \sqrt{2} - 1$  (voir figure I.12)

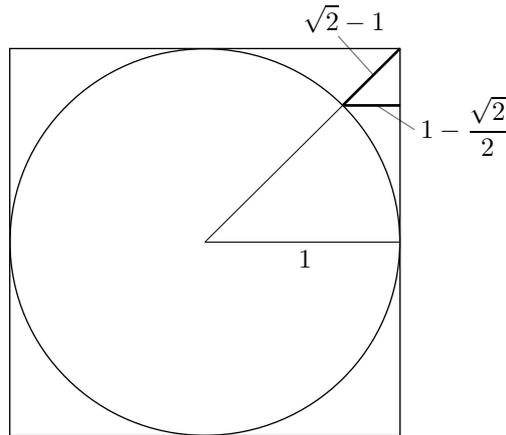


Figure I.12: Distance de Hausdorff du carré au cercle inscrit

**Proposition 5.6** *La distance de Hausdorff est une métrique, au sens de la définition 1.1, sur l'ensemble  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  des sous-ensembles compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Preuve:* Les propriétés (1) et (2) se vérifient sans peine. Pour l'inégalité du triangle, soient  $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  et prenons  $x \in A, y \in B, z \in C$  :

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x \in A, y \in B, z \in C \\ \Rightarrow d(x, C) &\leq d(x, y) + d(y, C) \leq d(x, y) + d_H(B, C) \quad \forall x \in A, \forall y \in B \\ &\Rightarrow d(x, C) \leq d(x, B) + d_H(B, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C) \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

et en échangeant les rôles de  $x$  et  $z$ , et de  $A$  et  $C$  on trouve :

$$d(z, A) \leq d_H(C, B) + d_H(B, A) \quad \forall z \in C$$

et de là il suit que

$$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C) \quad .$$

*q.e.d.*

Rappelons que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est compact si de toute suite dans  $X$  on peut extraire une suite qui converge. Il en suit que si  $\{F_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ ,  $F_1 \supset \dots \supset F_k \supset F_{k+1} \dots$  est une suite décroissante de compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ , on a que  $\bigcap_{k=1, \dots, \infty} F_k \neq \emptyset$ , car on peut choisir  $x_k \in F_k$ , et la limite d'une suite extraite de  $\{x_k\}$  appartient à  $\bigcap_{k=1, \dots, \infty} F_k$ .

**Proposition 5.7** *Soit  $\{F_k\}_{k=1, \dots, \infty}$  une suite décroissante de compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ . Alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

où la limite est entendue au sens de la distance de Hausdorff.

*Preuve:* Soit  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$  et  $\varepsilon > 0$  donné; posons :

$$A_{\geq \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \geq \varepsilon\} \quad .$$

C'est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et la suite des  $F'_k = F_k \cap A_{\geq \varepsilon}$  est une suite décroissante de compacts. Or :

$$\bigcap_{k \geq 1} F'_k = \left( \bigcap_{k \geq 1} F_k \right) \cap A_{\geq \varepsilon} = A \cap A_{\geq \varepsilon} = \emptyset$$

donc il doit exister  $K_\varepsilon$  tel que  $F'_k = \emptyset$  si  $k \geq K_\varepsilon$ , ce qui entraîne que  $F_k \subset A_\varepsilon$  si  $k \geq K_\varepsilon$ . Comme  $A \subset F_k$  pour tout  $k$ , cela entraîne, d'après la proposition 5.4, que  $d_H(F_k, A) \leq \varepsilon$  si  $k \geq K_\varepsilon$ .

*q.e.d.*

**Proposition 5.8** *L'espace  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , muni de la distance de Hausdorff, est complet*

*Preuve:* Soit  $\{X_k\}$  une suite de Cauchy de compacts de  $\mathbb{R}^n$  et posons:

$$F_N = \overline{\bigcup_{k \geq N} X_k}, \quad N \geq 1 \quad ;$$

on a que  $F_N \supset F_{N+1}$ . Si  $\varepsilon > 0$  est donné, il existe  $N_\varepsilon$  tel que  $N, M \geq N_\varepsilon \Rightarrow d_H(X_M, X_N) < \varepsilon$ , et donc  $X_N \subset (X_{N_\varepsilon})_\varepsilon$ ,  $N \geq N_\varepsilon$ . Il suit de ce fait que

$$F_N \subset (X_{N_\varepsilon})_\varepsilon \quad .$$

Puisque  $X_{N_\varepsilon}$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ , il en est de même pour  $(X_{N_\varepsilon})_\varepsilon$  et aussi pour  $F_N$ . Mais alors l'espace

$$A = \bigcap_{N \geq 1} F_N$$

est compact, non vide, et

$$A \subset (X_N)_\varepsilon, \quad N \geq N_\varepsilon.$$

Nous allons montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} (X_N) = A$ .

Il suit de la proposition précédente que  $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = A$ . Donc, si  $\varepsilon > 0$  est donné, il existe  $N'_\varepsilon$  tel que  $F_N \subset A_\varepsilon$  si  $N \geq N'_\varepsilon$ , et alors  $X_N \subset F_N \subset A_\varepsilon$ . Finalement :

$$N \geq \sup \{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} \Rightarrow X_N \subset F_N \subset A_\varepsilon \text{ et } A \subset (X_N)_\varepsilon \Rightarrow d_H(A, X_N) \leq \varepsilon \quad .$$

*q.e.d.*

## 5.4 La méthode IFS

**Proposition 5.9** *Soient  $w_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, N$  des applications contractantes, de constante de contraction  $s_i$ ,  $0 < s_i < 1$   $i = 1, \dots, N$ . Elles induisent une application*

$$\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N) : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad A \mapsto w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

*qui est une transformation contractante de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  muni de la distance de Hausdorff, de constante de contraction*

$$s = \sup \{s_i, i = 1, \dots, N\} \quad .$$

*Preuve:* Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est compact,  $w_i(A) \subset \mathbb{R}^n$  est compact, ainsi que  $w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$ , donc  $\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$ , que nous noterons  $T$  pour le reste de la preuve, est bien une transformation de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ . Vérifions qu'elle est contractante. Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  :

$$A \subset C_\varepsilon \text{ et } B \subset D_\varepsilon \Rightarrow A \cup B \subset C_\varepsilon \cup D_\varepsilon \subset (C \cup D)_\varepsilon$$

et de même

$$C \subset A_\varepsilon \text{ et } D \subset B_\varepsilon \Rightarrow C \cup D \subset (A \cup B)_\varepsilon \quad .$$

Il suit alors de 5.4 que

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \sup \{d_H(A, C), d_H(B, D)\}$$

et donc, pour tout  $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$

$$d_H(w_1(A) \cup w_2(A), w_1(B) \cup w_2(B)) \leq \sup \{d_H(w_1(A), w_1(B)), d_H(w_2(A), w_2(B))\} \quad .$$

Si on a  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , en appliquant de façon répétée ce qui précède :

$$\begin{aligned} d_H(A_1 \cup \dots \cup A_N, B_1 \cup \dots \cup B_N) &= d_H((A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) \cup A_N, (B_1 \cup \dots \cup B_{N-1}) \cup B_N) \\ &\leq \sup \{d_H(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}, B_1 \cup \dots \cup B_{N-1}), d_H(A_N, B_N)\} \leq \dots \\ &\dots \leq \sup \{d_H(A_1, B_1), \dots, d_H(A_N, B_N)\} \end{aligned}$$

Il suit du fait que  $\|w_i(x) - w_i(y)\| \leq s \cdot \|x - y\|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que  $d_H(w_i(A), w_i(B)) \leq s \cdot d_H(A, B)$ , donc finalement

$$d_H(w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A), w_1(B) \cup \dots \cup w_N(B)) \leq \sup \{d_H(w_i(A), w_i(B)), i = 1, \dots, N\} \leq s \cdot d_H(A, B)$$

ce qui s'écrit encore :

$$d_H(T(A), T(B)) \leq s \cdot d_H(A, B) \quad .$$

*q.e.d.*

En appliquant le théorème du point fixe **4.1** à  $\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$  on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 5.10** *Dans les hypothèses de 5.9,  $T = \mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$  possède un unique point fixe  $A \subset \mathbb{R}^n$ , ce qui veut dire que*

$$A = \bigcup_{i=1, \dots, N} w_i(A) \quad .$$

On a :

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

et si  $B \subset A$ , alors

$$A = \overline{\bigcup_{k \geq 1} T^k(B)}.$$

*Preuve:* Seule la dernière affirmation exige une explication. On sait que  $\forall B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) = A$ . Or, si  $B \subset A$ ,  $T^k(B) \subset T^k(A) = A$ , et les inclusions

$$T^k(B) \subset \overline{\bigcup_{k \geq 1} T^k(B)} \subset A$$

entraînent que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} T^k(B)} = A$ .

*q.e.d.*

On dit que la famille des  $N$  applications  $w_1, \dots, w_N$  est un codage IFS du compact  $A$ . La figure **I.13** montre l'effet de 0, 1, 4, puis 6 itérations de  $T = \mathcal{K}(w_1, w_2, w_3)$  sur le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ , où  $w_1, w_2, w_3$  sont les transformations qui codent le triangle de Sierpinski obtenu en partant du triangle de sommets  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  :  $w_1, w_2$  et  $w_3$  sont les homothéties de rapport  $1/2$  et de centre respectivement  $A, B$  et  $C$ .

La figure **I.14** montre les mêmes itérations en partant du carré de sommets  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ .

**Théorème 5.11** *Dans les hypothèses de 5.9, si  $L \subset \mathbb{R}^n$  est un compact tel que*

$$d_H(L, \mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)(L)) < \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon > 0$$

alors, si  $A$  dénote l'unique point fixe de  $\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$ ,

$$d_H(L, A) < \frac{\varepsilon}{1 - s}.$$

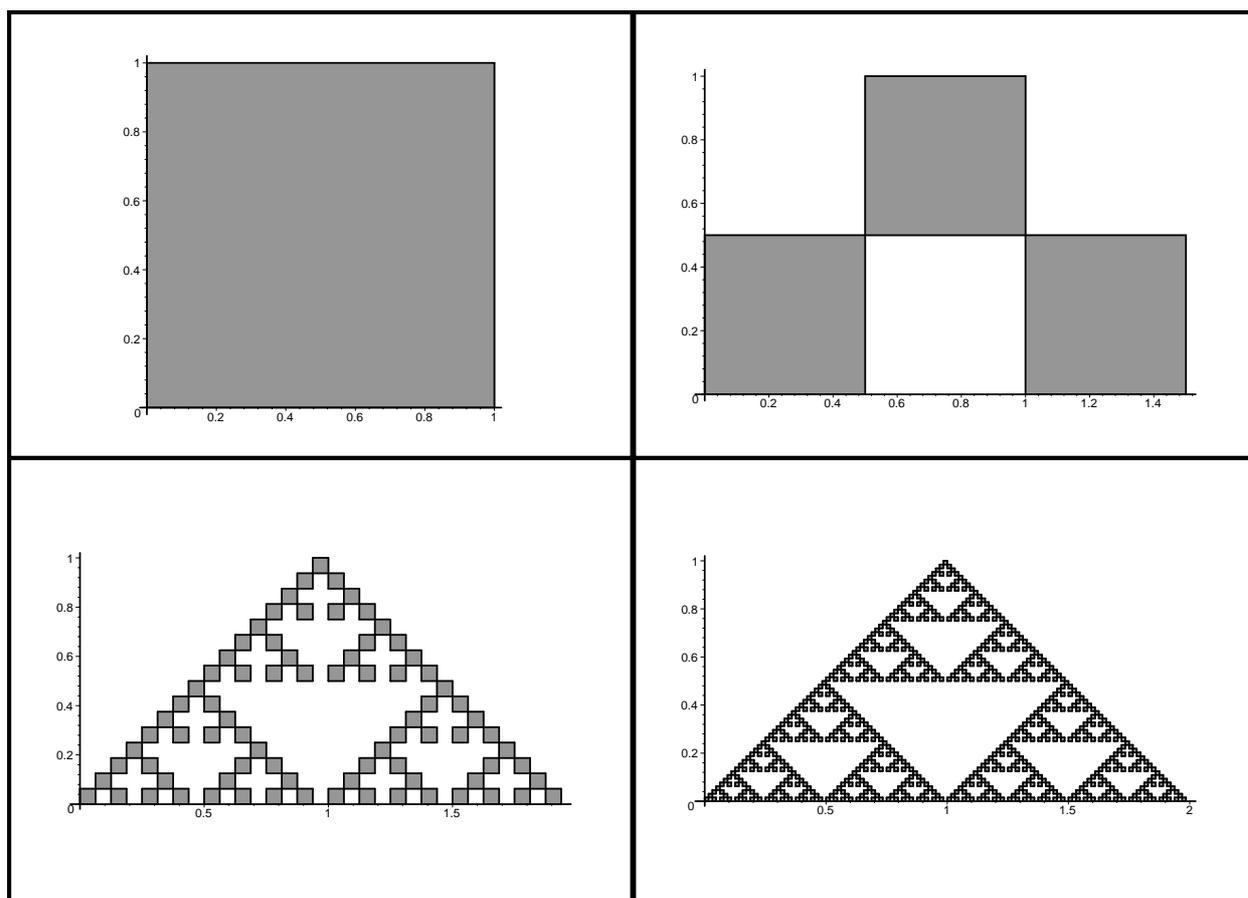


Figure I.13: Itérations convergant vers le triangle de Sirpinski, en partant du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$

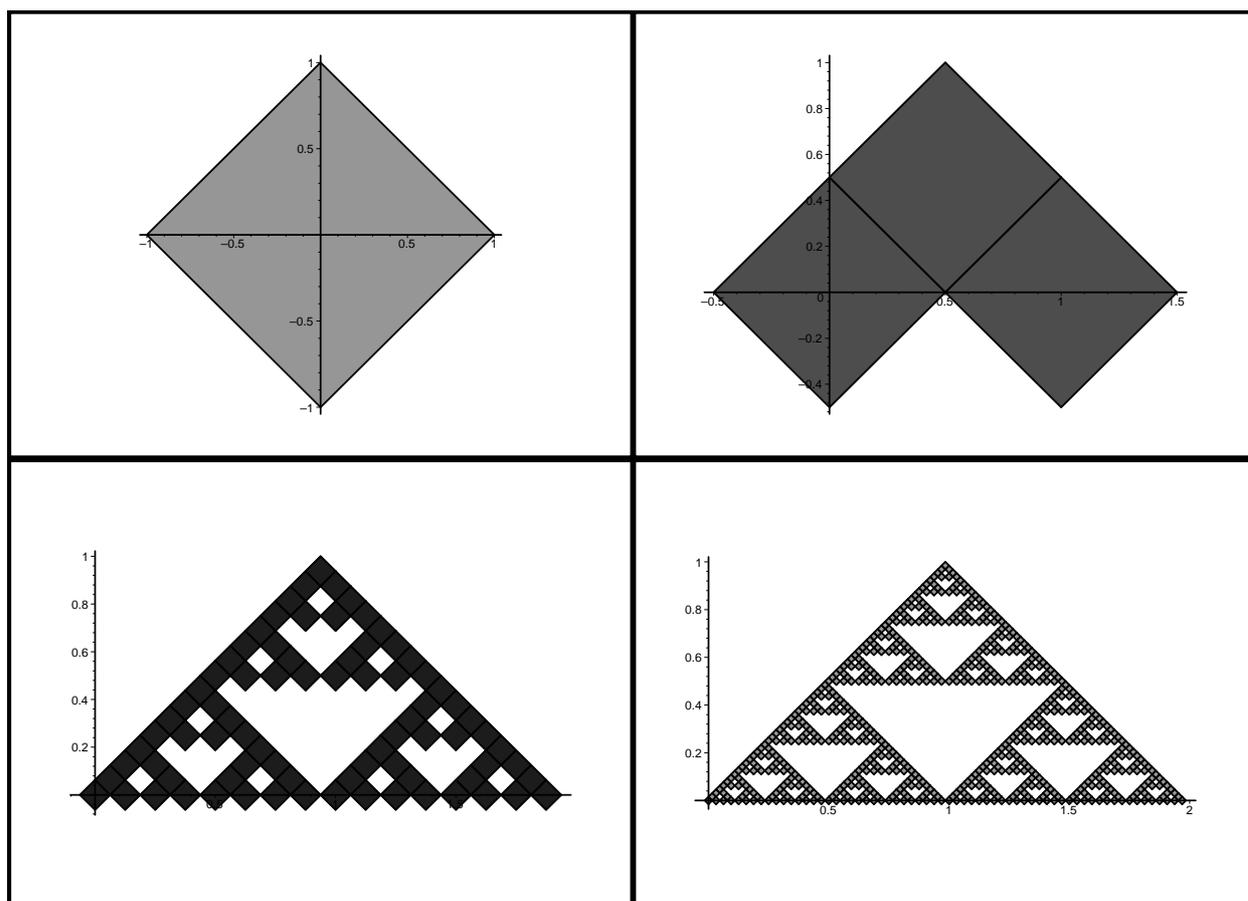


Figure I.14: Itérations convergeant vers le triangle de Sirpinski, en partant du carré de sommets  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$

Preuve:

$$d_H(L, A) \leq d_H(L, T(L)) + d_H(T(L), T(A)) < \varepsilon + s \cdot d_H(L, A) \quad \Rightarrow \quad d_H(L, A) < \frac{\varepsilon}{1-s} .$$

*q. e. d.*

Ce dernier résultat est appelé "Collage Theorem" par Barnsley et Sloan. Il affirme que si l'on veut coder  $L$  et qu'on a trouvé des transformations  $w_1, \dots, w_N$  pour lesquelles  $L$  est un point fixe à  $\varepsilon$  près seulement, on a tout de même que l'image codée par les  $w_i$  est  $\frac{\varepsilon}{1-s}$ -proche de  $L$ .

**Exemples 5.12** On peut repenser les exemples du § 5.1 à la lumière du théorème précédent. L'intervalle  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  est codé par les 2 transformations

$$w_1(x) = 1/2x \quad , \quad w_2(x) = 1/2x + 1/2$$

puisque  $w_1([0, 1]) = [0, 1/2]$ ,  $w_2([0, 1]) = [1/2, 1]$  et donc

$$[0, 1] = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1])$$

L'ensemble de Cantor  $C \subset \mathbb{R}$  est codé par  $w_1$  et  $w_2$ , où cette fois

$$w_1(x) = 1/3x \quad , \quad w_2(x) = 1/3x + 2/3$$

Le triangle de Sierpinski construit à partir de 3 sommets  $A, B, C$  est codé par  $w_A^{1/2}$ ,  $w_B^{1/2}$  et  $w_C^{1/2}$ .

Pour reconstruire un ensemble  $A$  codé par des transformations  $w_1, \dots, w_N$ , on peut procéder ainsi. On choisit un point  $P \in A$ , on lui applique les  $N$  transformations et on obtient  $N$  points de  $A$ , auxquels on applique à nouveau les  $w_i$ , et ainsi de suite. D'après 5.10 :

$$A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)(P)}$$

et donc ce procédé permet d'approcher  $A$ . Il a le désavantage qu'à chaque étape il faut avoir en mémoire tous les points précédemment construits; à la  $k$ -ième étape il y en aura  $N^{k-1}$ .

Pour y remédier, Barnsley et Sloan ont proposé une autre méthode, que nous allons maintenant esquisser. On choisit judicieusement  $N$  nombres  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $0 < p_i < 1$ ,  $p_1 + \dots + p_N = 1$  et on part d'un point  $P \in A$ . On choisit au hasard<sup>2</sup> l'une des  $N$  transformations  $w_i$ , avec probabilité  $p_i$  pour  $w_i$ ; on applique ce  $w_i$ , puis on recommence avec  $w_i(P)$ . Le choix des probabilités doit être équilibré : les transformations plus contractantes doivent être choisies moins souvent, la probabilité correspondante doit donc être plus petite. Par exemple, dans le cas de l'ensemble de Cantor, les deux transformations ont même constante de contraction; alors on doit prendre  $p_1 = p_2 = 1/2$ . De même, pour le triangle de Sierpinski, on prend  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ ; la figure I.7 montre le dessin obtenu par ce procédé après 10000 itérations.

Par contre dans l'exemple de la feuille de fougère donné ci-dessous, il convient de donner une probabilité beaucoup plus petite à  $w_1$  qu'aux autres transformations, parce que c'est une application "très contractante": si on donne des probabilités égales, on dessine beaucoup de points près du bas de la tige (voir figure I.15). On peut représenter une application affine  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire une application du type  $(x, y) \mapsto A(x, y) + \tau$ , où  $A$  est linéaire, par la matrice  $2 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} a & b & \tau_1 \\ c & d & \tau_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \tau = (\tau_1, \tau_2)$$

et on peut alors calculer  $w(x, y)$  par le produit matriciel:

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b & \tau_1 \\ c & d & \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

<sup>2</sup>Concrètement, on choisit au hasard  $t \in ]0, 1]$ , et on prendra la transformation  $w_i$  si  $\sum_{j=1}^{i-1} p_j < t \leq \sum_{j=1}^i p_j$  (on pose  $\sum_{j=1}^0 = 0$ ).

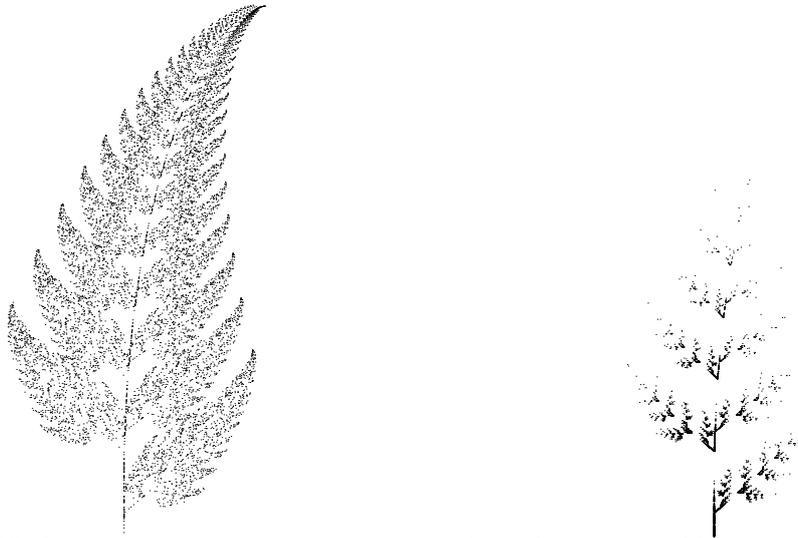


Figure I.15: La fougère avec un bon et un mauvais choix de probabilités :  
à gauche  $p_1 = 0.01, p_2 = 0.07, p_3 = 0.07, p_4 = 0.85$ , à droite  $p_i = 0.25, i = 1, \dots, 4$

L'homothétie de rapport  $\lambda$  et centre  $P = (c_1, c_2)$  s'écrit :

$$x \mapsto \lambda(x - P) + P = \lambda x + (1 - \lambda)P$$

et sa représentation matricielle s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 - \lambda c_1 \\ 0 & \lambda & 1 - \lambda c_2 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, le triangle de Sierpinski de sommets  $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$  est codé par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Considérons les 4 transformations affines suivantes:

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \end{pmatrix} , & w_2 &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 & 0 \\ 0.23 & 0.22 & 1.6 \end{pmatrix} \\ w_3 &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 & 0 \\ 0.26 & 0.24 & 0.44 \end{pmatrix} , & w_4 &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 & 0 \\ -0.04 & 0.85 & 1.6 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La figure **I.15** montre le résultat que l'on obtient après 5'000 itérations en partant du point  $(0, 0)$ , avec un bon choix de  $p_1, \dots, p_4$  et avec un mauvais choix.

Pour comprendre à quoi correspondent les 4 transformations, il faut voir la feuille de fougère comme réunion de quatre de ses parties (voir figure **I.16**) :

$w_1$  – la petite tige allant du bas jusqu'à la deuxième branche depuis le bas

$w_2$  – la première branche en bas à droite

$w_3$  – la première branche en bas à gauche

$w_4$  – la feuille privée des deux premières branches du bas.

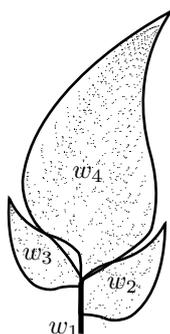


Figure I.16: Esquisse des transformations qui codent la feuille de fougère

La transformation  $w_1$  projette la fougère sur un axe vertical, puis fait subir à cette projection une homothétie de rapport 0.16, centrée au bas de la tige; les autres transformations se devinent aisément. On voit que  $w_1$  est très contractante,  $w_4$  l'est très peu,  $w_2$  et  $w_3$  sont un peu moins contractantes que  $w_1$ , mais bien plus que  $w_4$ ; les probabilités sont choisies en conséquence : les transformations les plus contractantes tirent très fort vers leur propre point fixe, on doit donc les choisir moins souvent, ce qui veut dire qu'on doit leur assigner une probabilité plus petite.

### 5.5 Exemples de programmes informatiques

Voici le programme postscript utilisé pour dessiner le triangle de Sierpinski de la figure III.2 :

```

%!
/Ax 10 def
/Ay 100 def
/Bx 400 def
/By 10 def
/Cx 300 def
/Cy 250 def
/lambda 0.5 def
/wAx{Ax sub lambda mul Ax add}def
/wAy{Ay sub lambda mul Ay add}def
/wBx{Bx sub lambda mul Bx add}def
/wBy{By sub lambda mul By add}def
/wCx{Cx sub lambda mul Cx add}def
/wCy{Cy sub lambda mul Cy add}def
/a Ax def
/b Ay def
0.5 setlinewidth
/montre{a b 0.5 0 360 arc fill}def
/Times-Roman findfont 10 scalefont setfont
Ax 10 sub Ay 10 sub moveto (A) show
Bx 10 add By 10 sub moveto (B) show
Cx Cy 10 add moveto (C) show
Ax Bx add 2 div Ay By add 2 div 20 sub moveto (C') show
Ax Cx add 2 div 10 sub Ay Cy add 2 div 10 add moveto (B') show
Cx Bx add 2 div 10 add Cy By add 2 div 10 add moveto (A') show
a b moveto
10000{
/p rand 300 mod def
p 100 lt {/a a wAx def /b b wAy def}

```

```
{p 200 lt {/a a wBx def /b b wBy def}{/a a wCx def /b b wCy def} ifelse} ifelse
montre}
repeat
showpage
```

Et voici le programme Matlab utilisé pour dessiner la courbe de von Koch. Les deux fonctions "rota" et "homot" doivent être mises chacune dans son fichier, nommé "rota.m" et "homot.m" respectivement.

```
function Y=rota(a,c,X)
%rotation de centre c, angle a appliquee au vecteur X
R=[cos(a) -sin(a);sin(a) cos(a)];
Y=R*(X-c)+c;

function H=homot(lambda,c,X)
%homotetie de centre c et rapport lambda appliquee a X
H=lambda*(X-c)+c;

% le programme lui-meme
X=[0;0];
for i=1:10000
    p=rand;
    if p<0.25
        X=homot(1/3,[0;0],X);
    elseif p<0.5
        X=homot(1/3,[1;0],X);
    elseif p<0.75
        X=rota(pi/3,[0;0],homot(1/3,[0;0],X))+[1/3;0];
    else
        X=rota(-pi/3,[1;0],homot(1/3,[1;0],X))+[-1/3;0];
    end
    plot(X(1),X(2),'markersize',5,'color','k');
    hold on;
end
axis equal;
axis off;
hold off;
```

Il est à noter qu'il est indispensable de choisir les diverses transformations par un procédé pseudo-aléatoire. Voici 2 programmes en postscript qui dessinent des points de l'ensemble de Cantor, le premier par un procédé pseudo-aléatoire, avec probabilités égales pour chacune des 2 transformations, le deuxième en les choisissant alternativement :

```
% !
% ensemble de Cantor avec procédé aléatoire
/Ax 20 def
/Ay 10 def
/Bx 400 def
/By 10 def
/lambda 0.3333 def
/wAx{Ax sub lambda mul Ax add}def
/wAy{Ay sub lambda mul Ay add} def
/wBx{Bx sub lambda mul Bx add} def
/wBy{By sub lambda mul By add} def
1 setlinewidth
```

```

/a Ax def
/b Ay def
/montre{a b 0.5 0 360 arc fill}def
10000{
/p rand 200 mod def
p 100 lt{
/a a wAx def /b b wAy def}{
/a a wBx def /b b wBy def}ifelse montre
}
repeat
showpage
}

% !
% ensemble de Cantor avec choix alterné des transformations
/Ax 20 def
/Ay 10 def
/Bx 400 def
/By 10 def
/lambda 0.3333 def
/wAx{Ax sub lambda mul Ax add}def
/wAy{Ay sub lambda mul Ay add} def
/wBx{Bx sub lambda mul Bx add} def
/wBy{By sub lambda mul By add} def
1 setlinewidth
/a Ax def
/b Ay def
/montre{a b a b 0.5 0 360 arc fill}def
5000{
/a a wAx def /b b wAy def montre
/a a wBx def /b b wBy def montre
}
repeat
showpage

```

Voici le résultat :



Figure I.17: Un bon Cantor



Figure I.18: Un mauvais Cantor

Et voici l'explication : Si, dans l'itération, on alterne le choix des deux transformations  $w_1(x) = 1/3x$  et  $w_2(x) = 1/3x + 2/3$ , cela revient à dessiner les itérés des composées :

$$w_{(1,2)}(x) = w_1(w_2(x)) = 1/9x + 2/3 \quad \text{et} \quad w_{(2,1)}(x) = w_2(w_1(x)) = 1/9x + 2/9 \quad .$$

Or  $w_{(1,2)}(x)$  a pour unique point fixe  $x = 3/4$  et  $w_{(2,1)}(x)$  a pour unique point fixe  $x = 1/4$ . Les points que l'on dessine s'accroissent donc vers l'ensemble  $\{1/4, 3/4\}$ .

## 6 Exercices

### A Espaces métriques, ouverts, fermés, continuité

1 Soit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = x^n$ . Calculer  $\|f_n\|_\infty$ ,  $\|f_n\|_1$ ,  $\|f_{n+k} - f_n\|_\infty$ ,  $\|f_{n+k} - f_n\|_1$ .

2 Soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calculer les normes  $\| \cdot \|_\infty$ ,  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  de  $f_n$ . Etudier la convergence de cette suite de fonctions.

3

a) Soit  $f_n(x) = (x \cdot (1-x))^n$ . Calculer  $\sup \{f_n(x), 0 \leq x \leq 1\}$  et en déduire que  $f_n$  tend uniformément vers 0, pour  $x \in [0, 1]$ .

b) Soit  $P[0, 1]$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$ , c'est-à-dire les fonctions de la forme  $\sum_{h=0}^d a_h x^h$ . Montrer que

$$\left\| \sum_{h=0}^d a_h x^h \right\|_* = \sum_{0 \leq h \leq d} |a_h|$$

définit une norme sur  $P[0, 1]$ .

Montrer que  $\|f\|_\infty \leq \|f\|_*$ , pour tout  $f \in P[0, 1]$ . Néanmoins, déduire de a) que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

c) Montrer que si  $f_n(x) = \sum_{h=0}^d a_h^n x^h$ ,  $n = 1, \dots, \infty$  est une suite dans  $P[0, 1]$  vérifiant  $\deg(f_n) \leq d$ ,  $\forall n \geq 1$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|f_n(x)|, 0 \leq x \leq 1\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_h^n = 0 \quad , \quad \forall h = 0, \dots, d.$$

4 Soit  $M(2, 2, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des  $2 \times 2$ -matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $i = 0, 1, 2$ , on considère les ensembles:

$$\Sigma^i = \{A \in M(2, 2, \mathbb{R}) \mid \text{rang}(A) = i\}$$

a) Dire si les ensembles  $\Sigma^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , sont ouverts, fermés ou ni l'un, ni l'autre.

b) Trouver leurs adhérences.

5 Définissons :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2/x_1 & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , décrire l'ensemble  $f^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon[)$  et en déduire que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

6 Les applications suivantes :

$$I : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

$$ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto f(0)$$

sont-elles continues, lorsqu'on prend sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  la norme  $\| \cdot \|_\infty$  ? la norme  $\| \cdot \|_1$  ?

7 Considérons la suite de fonctions continues  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 0$ , définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ nx - n/2 + 1 & \text{si } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Esquisser le graphe de ces fonctions. Montrer que  $(f_n)$  est une suite de Cauchy dans  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ . Montrer que si cette suite possède une limite  $f$  dans  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ , alors  $f(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1/2$  et  $f(x) = 1$  si  $1/2 \leq x \leq 1$ . En déduire que  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  n'est pas complet.

## B Polynômes de Bernstein

8 Soit  $B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  le  $k$ -ième polynôme de Bernstein de degré  $n$ . Trouver ses extrema pour  $0 \leq x \leq 1$  et esquisser son graphe.

9 Montrer que l'on a :

$$(B_n^k)'(x) = n(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x))$$

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie par  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ . Déduire de la relation précédente que la suite des dérivées  $(f_n')$  converge uniformément vers  $f'$  sur  $[0, 1]$ .

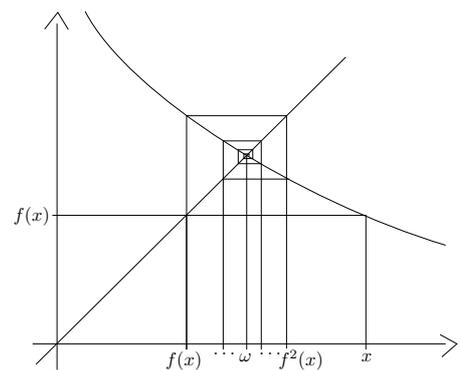
## C Théorème du point fixe

10 Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue. Montrer que  $f$  possède au moins un point fixe (Indication: considérer la fonction  $g(x) = f(x) - x$ .)

11 Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, admettant une dérivée continue. Supposons que  $f(\omega) = \omega$  et  $|f'(\omega)| < 1$ , pour un  $\omega \in ]a, b[$ . Utiliser le théorème des accroissements finis pour en déduire l'existence d'un  $r > 0$  tel que  $[\omega - r, \omega + r] \subset ]a, b[$  et tel que le théorème du point fixe s'applique à  $f|_{[\omega-r, \omega+r]}$ . Montrer que si  $|f'(x_0)| > 1$  un tel  $r$  n'existe pas.

12 Soit  $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ . Trouver les points fixes de  $f$ . Pour chaque point fixe  $\omega$  dire, à l'aide de l'exercice précédent, s'il existe un voisinage  $V$  tel que si  $x \in V$ , les itérés de  $f^n(x)$  convergent vers  $\omega$  ou non; représentez graphiquement ces itérés, comme sur le dessin ci-contre.

Même question pour  $f(x) = 2x(1-x)$



13 Trouver les solutions de l'équation intégrale :

$$\phi(x) = x - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$$

par itérations successives, en partant de la fonction  $\phi_0(x) \equiv 0$ .

14 Soit  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire ayant pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|(x, y)\| = \sup\{|x|, |y|\}$ . Montrer que  $A$  n'est pas contractante. Trouver  $N$  tel que  $A^N$  soit contractante.

15 Soient

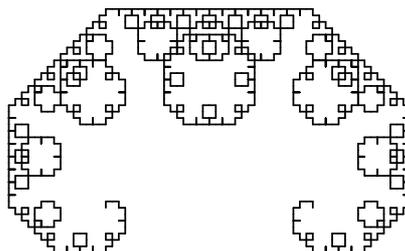
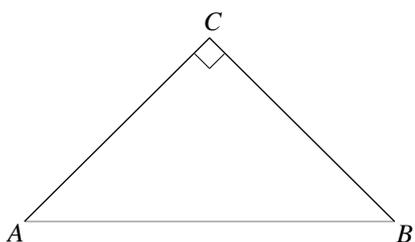
$$f(x) = x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Montrer que  $t(0) = 1/\sqrt{2}$  et  $t(1/\sqrt{2}) = 0$ . Appliquer l'exercice 11 à la fonction  $g(x) = t(t(x))$ , pour montrer l'existence d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}$  tel que, si on applique la méthode de Newton à  $f(x)$ , avec  $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  et un point de départ dans  $U$ , on obtienne une suite qui ne converge pas. Expliquer ce paradoxe apparent : le deuxième itéré  $t^2$  de  $t$  est contractant sur un voisinage de 0, mais 0 n'est pas point fixe de  $t$ .

## D Fractals, dimension de Hausdorff, méthode IFS

16 Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  le fractal défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un segment  $\overline{AB}$  dans le plan, et on construit le triangle isocèle  $\Delta(ABC)$  ayant  $\overline{AB}$  pour base et un angle droit au sommet  $C$ ; puis on recommence avec  $\overline{AC}$  et  $\overline{CB}$ , et ainsi de suite (voir figure ci-dessous). Trouvez 2 transformations

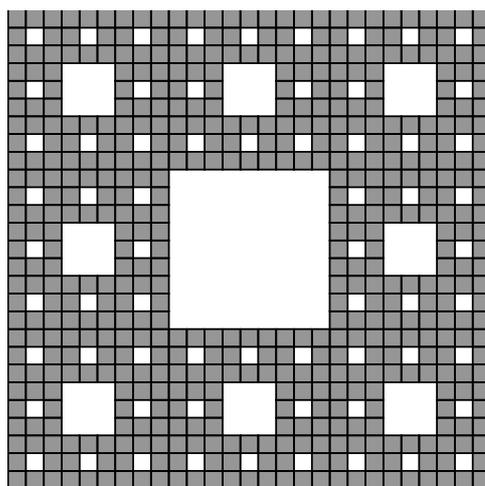
après 10 étapes :



affines contractantes  $w_1$  et  $w_2$  telles que  $D = w_1(D) \cup w_2(D)$ . Calculez la dimension de Hausdorff de  $D$ .

17 Soit  $TS \subset \mathbb{R}^2$  défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un carré de sommets  $A, B, C, D$  dans le plan. On le partage en 9 carrés égaux, de côté égal au tiers du côté du carré de départ, on enlève le carré du milieu. Puis on recommence avec les 8 carrés restants, et ainsi de suite. La figure ci-contre montre le résultat après 3 étapes (on appelle ce fractal le "tapis de Sierpinski").

Trouvez des transformations affines contractantes  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  telles que  $TS = w_1(TS) \cup \dots \cup w_N(TS)$ . Calculez la dimension de Hausdorff de  $TS$ .



18 Trouver la distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$ :

- (1)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y + 3)^2 = 9\}$   
 (2)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup\{|x|, |y|\} = 1\}$   
 (3)  $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $B =$  ensemble de Cantor  
 (4)  $A = [-1, +1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\right\}$ , où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**19** Trouver la limite des suites de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$  suivantes :

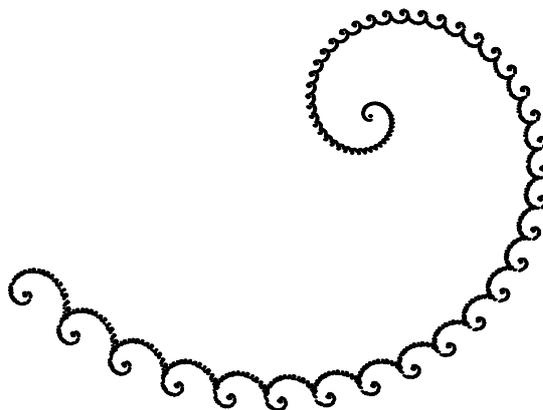
- (1)  $X_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\right\}$ ,  $n \geq 1$   
 (2)  $X_n = \{(x, x^n), -1 \leq x \leq 1\}$

**20** Soient  $w_1(x) = x/3$ ,  $w_2(x) = x/3 + 2/3$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Définissons la suite  $\{x_n\}$  par récurrence :

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1(x_0) \quad , \quad x_2 = w_2(x_1) \quad , \dots , \\ x_{2n+1} &= w_1(x_{2n}) \quad , \quad x_{2n+2} = w_2(x_{2n+1}) \quad . \end{aligned}$$

Montrer que la suite  $x_n$  s'accumule vers l'ensemble  $\{1/4, 3/4\}$ .

**21** Décrivez 2 transformations affines  $w_1$  et  $w_2$  telle que  $L = w_1(L) \cup w_2(L)$ , où  $L$  est la limace ci-dessous :





# Chapitre II

## Dérivabilité, théorème des fonctions implicites et applications

*Sommaire.* Les dérivées d'une fonction en un point permettent de comprendre son comportement au voisinage de ce point (formule de Taylor); dans la pratique ce sont souvent les dérivées d'ordre 1 ou 2 seulement qui sont utilisées. Par exemple, il existe un critère bien connu pour qu'une fonction d'une variable  $f(x)$  admette un extremum (maximum ou un minimum) local en un point  $a$  : il faut que la dérivée de  $f$  en  $a$  soit nulle, ce qui s'interprète géométriquement par le fait que la tangente au graphe de  $f$  au point  $(a, f(a))$  doit être horizontale. C'est sur ce critère que se basent la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la recherche d'extrema liés, et les équations d'Euler-Lagrange pour la recherche d'extrema dans des espaces de dimension non finie (calcul des variations).

### 1 Dérivabilité, différentiabilité

#### 1.1 Norme d'une application linéaire

Soit  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application linéaire. Les coefficients de la matrice de  $A$  par rapport aux bases naturelles  $e_j, j = 1, \dots, n$ , et  $e_i, i = 1, \dots, p$ , de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  respectivement sont définis par :

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e_i \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

et alors, si  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{p,j} x_j \end{pmatrix}_{i=1, \dots, p} .$$

On déduit facilement de cette expression de  $A$  que c'est une application continue.

**Définition 1.1 (norme d'une application linéaire)** La norme de l'application linéaire  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  relative à des normes données sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  est définie par :

$$\|A\| = \sup \left\{ \|A(x)\|_{\mathbb{R}^p} \mid \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1 \right\} .$$

Puisque  $A$  est continue et que  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  est compact, l'ensemble  $\{A(x) \mid \|x\| \leq 1\}$  est borné et donc cette définition a un sens. La valeur de  $\|A\|$  dépend des normes choisies sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ , même si cela n'est pas noté explicitement.

**Proposition 1.2 i)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$\|A(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|A\| \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad .$$

ii)  $\|A\|$  définit une norme sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

iii)  $\|A\| = \inf \{K \mid \|A(x)\| \leq K \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

Preuve: i) Si  $x = 0$ , l'inégalité affirmée est évidente. Sinon,  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$  et alors :

$$\|A(x)\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| \leq \|A\| \|x\| \quad .$$

ii) Vérifions que  $\|A\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  (cf. définition 1.2 du chap. I).

(1) Si  $\|A\| = 0$ , alors il suit de i) que  $A = 0$ .

(2) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\|\lambda A(x)\| = |\lambda| \|A(x)\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  et il en suit que  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ .

(3) Si  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  on a :

$$\|(A+B)(x)\| = \|A(x) + B(x)\| \leq \|A(x)\| + \|B(x)\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1$$

et donc  $\|A+B\| = \sup \{\|(A+B)(x)\|, \|x\| \leq 1\} \leq \|A\| + \|B\|$ .

iii) D'après i),  $\|A\| \in \{K \mid \|A(x)\| \leq K \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$  et donc

$$\|A\| \geq \inf \{K \mid \|A(x)\| \leq K \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Si  $K$  est tel que  $\|A(x)\| \leq K \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\|A\| = \sup \{\|A(x)\|, \|x\| \leq 1\} \leq K \cdot 1$  et donc

$$\|A\| \leq \inf \{K \mid \|A(x)\| \leq K \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\} \quad .$$

*q. e. d.*

Par exemple, si l'on munit  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , on peut estimer la norme de  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  à l'aide des coefficients de la matrice  $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$  de  $A$ :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \left( \sum_j |a_{i,j}| \right) \cdot \|x\|_\infty, \forall i = 1, \dots, p \Rightarrow \|A(x)\|_\infty \leq \sup_{i=1,\dots,p} \left\{ \sum_j |a_{i,j}| \right\} \cdot \|x\|_\infty$$

et donc  $\|A\| \leq \sup_{i=1,\dots,p} \left\{ \sum_j |a_{i,j}| \right\} \leq n \cdot \sup \{|a_{i,j}|, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n\}$ .

## 1.2 L'inégalité fondamentale de l'intégrale

Rappelons que si  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, on définit son intégrale comme étant le nombre réel qui est limite de sommes sur les partages de  $[a, b]$ :

$$(1-1) \quad \int_a^b \phi(x) dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1, \dots, \ell(P)} \phi(x_i) \Delta x_i \right)$$

où  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$  est un partage de  $[a, b]$ ,  $\ell(P) = k$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, \ell(P)$  et  $\delta(P) = \sup \{\Delta x_i \mid i = 1, \dots, \ell(P)\}$ .

Dans le cas d'une application continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ , l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^p$  obtenu en intégrant les composantes  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , de  $f$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \left( \int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_p(x) dx \right)$$

et en appliquant (1-1) aux  $f_i$  on voit que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1, \dots, \ell(P)} f(x_i) \Delta x_i \right) .$$

Puisque

$$\left\| \sum_{i=1, \dots, \ell(P)} f(x_i) \Delta x_i \right\| \leq \sum_{i=1, \dots, \ell(P)} \|f(x_i)\| \Delta x_i$$

en faisant tendre  $\delta(P)$  vers 0, on obtient l'inégalité suivant, appelée inégalité fondamentale de l'intégrale:

$$(1-2) \quad \left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx$$

### 1.3 Dérivabilité, différentiabilité

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application.

**Définition 1.3 (Dérivabilité)** Soit  $a \in \Omega$ . On dit que  $f$  est dérivable (ou différentiable) au point  $a$  s'il existe une application linéaire  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  telle que, pour  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|h\|$  assez petit :

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + r(h) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \quad .$$

Autrement dit :

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad h \rightarrow 0$$

ou encore :

$$\|h\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(a+h) - f(a) - A(h)\| \leq \varepsilon \cdot \|h\| \quad .$$

Si l'on pose  $\phi(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|}$ , cela veut encore dire que :

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + \phi(h) \cdot \|h\| \quad , \quad \text{avec} \quad \phi(h) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad h \rightarrow 0$$

En d'autres termes, l'application linéaire  $h \mapsto A(h)$  est une approximation de  $h \mapsto f(a+h) - f(a)$ , avec une erreur  $r(h)$  qui est très petite par rapport  $h$ , puisque  $\frac{r(h)}{\|h\|}$  tend vers 0 si  $h \rightarrow 0$ .

#### Remarques 1.4

(1) Si  $f$  est dérivable au point  $a$ , elle est continue en ce point, car :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + A(h) + \phi(h) \cdot \|h\|) = f(a)$$

(2) Si  $f$  est dérivable au point  $a \in \Omega$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , la limite suivante, dans laquelle  $t \in \mathbb{R}$ , existe :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t \cdot v) - f(a)}{t}$$

et elle est égale à  $A(v)$ . En effet :

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{A(t \cdot v) + \phi(t \cdot v) \cdot |t| \cdot \|v\|}{t} = \frac{A(t \cdot v)}{t} \pm \phi(t \cdot v) \cdot \|v\| \rightarrow A(v) \quad \text{si} \quad t \rightarrow 0 \quad .$$

On appelle  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  la dérivée de  $f$  dans la direction du vecteur  $v$  au point  $a$ . Puisque  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = A(v)$ , cela montre que  $A$  est entièrement déterminée par  $f$ ; on l'appelle la dérivée de  $f$  au point  $a$ , et on la note  $df_a$  ou encore  $f'(a)$ . En particulier, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est linéaire, en tout point  $a \in \mathbb{R}^n$  elle coïncide avec sa propre dérivée en ce point :  $df_a = f$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^n$ .

Notons que si  $v = 0$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ .

- (3) Si  $f = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  est dérivable au point  $a \in \Omega$ , sa dérivée  $df_a = f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  peut être représentée par une matrice, qu'on appelle matrice jacobienne (inventée par Carl Jacobi, 1804–1851); elle s'écrit :

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right), \text{ où } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + t \cdot e_j) - f_i(a)}{t} = \frac{\partial f_i}{\partial e_j}(a)$$

où  $e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_j, 1, 0, \dots, 0)$  dénote le  $j$ -ème vecteur de la base naturelle de  $\mathbb{R}^n$ . Par abus de langage,

on écrit souvent  $df_a = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ . Les  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$  sont appelées dérivées partielles de  $f$  au point  $a$ . Nous verrons un peu plus loin (1.10) le théorème suivant, qui permet de passer de l'existence des dérivées partielles de  $f$  à la dérivée de  $f$  au sens de la définition 1.3 : si les  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  existent pour  $x$  dans un voisinage de  $a$ , et sont continues sur ce voisinage, alors  $f$  est dérivable au point  $a$ .

Par exemple, soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1 x_2, x_2^3)$ , alors :

$$df_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \\ 0 & 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

- (4) Dérivabilité et différentiabilité.

Autrefois on appelait *différentielle* d'une fonction  $f(x)$  (ou encore *différentielle totale*) l'accroissement des valeurs de  $f$  lorsqu'on donnait un accroissement "infinitésimal" à la variable  $x$ ; pour une fonction de deux variables, on écrivait :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \quad ;$$

le reste a disparu, parce que c'est un "infinitésimal d'ordre supérieur" par rapport aux  $dx_i$  (voir par exemple Ed. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Gauthier-Villars, Paris (1910), page 52.) Le terme de dérivée était réservé aux dérivées partielles; dans les ouvrages contemporains, les notions de dérivabilité et différentiabilité sont équivalentes, et correspondent à notre définition 1.3.

Dans le cas de fonctions d'une variable, on écrivait  $df = f'(x)dx$ , d'où l'on tire :  $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$ . Ce n'est pas très rigoureux, mais la notation  $\frac{df}{dx}(x)$  pour  $f'(x)$  peut être utile, parce que l'on explicite le nom de la variable par rapport à laquelle on dérive. Cette notation sera utilisée dans la formule d'Euler-Lagrange au § 4.

**Proposition 1.5 (Dérivation de fonctions composées)** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^p$ , des applications, et supposons que  $f(\Omega) \subset \Omega'$ . Supposons que  $f$  soit dérivable au point  $a \in \Omega$ , et que  $g$  soit dérivable au point  $b = f(a)$ . Alors la composée  $g \circ f$  est dérivable au point  $a$  et sa dérivée en ce point est la composée de la dérivée de  $f$  en  $a$  avec la dérivée de  $g$  en  $b = f(a)$  :

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a \quad .$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= g'(f(a)) \left( f(a+h) - f(a) \right) + \phi_g(f(a+h) - f(a)) \cdot \|f(a+h) - f(a)\| = \\ &= \underbrace{g'(f(a)) (f'(a)(h)) + g'_{f(a)}(\phi_f(h)) \cdot \|h\|}_{=\rho(h)} + \phi_g(f(a+h) - f(a)) \cdot \left( \|f'(a)(h)\| + \|\phi_f(h)\| \right) \cdot \|h\| \end{aligned}$$

et

$$\|\rho(h)\| \leq \|g'(b)\| \cdot \|\phi_f(\|h\|)\| \cdot \|h\| + \|\phi_g(f(a+h) - f(a))\| \cdot (\|f'(a)\| + \|\phi_f(h)\|) \cdot \|h\|$$

d'où on déduit que  $\frac{\rho(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  si  $h \rightarrow 0$ , donc  $\rho(h)$  vérifie bien les conditions de terme de reste de la définition 1.3.

*q.e.d.*

On aimerait avoir une estimation explicite de l'accroissement  $f(a+h) - f(a)$  en termes de  $\|h\|$ ; pour des fonctions à une variable, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on connaît le théorème des accroissements finis, qui dit que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable, alors il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que

$$\spadesuit \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad .$$

En général, on ne peut pas s'attendre à avoir des formules analogues; par exemple, si l'on prend l'application  $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ ,  $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$  :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)(1 - 0) = \varphi'(\xi) \Rightarrow (1, 1) = (2\xi, 3\xi^2) \Rightarrow \xi = 1/2 \text{ et } \xi^2 = 1/3$$

il n'y a donc pas de solutions. Par contre, on déduit de  $\spadesuit$  que, si  $|f'(\xi)| \leq M$ ,  $\xi \in [a, b]$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$  et cette inégalité se généralise, comme nous allons voir maintenant (théorème 1.8.)

**Définition 1.6 (Application de classe  $\mathcal{C}^1$ )** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  dérivable en tout point  $a \in \Omega$ ; en associant à tout point  $a \in \Omega$  la dérivée en ce point  $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  on définit une application  $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , ou 1 fois continûment dérivable, si l'application  $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  est continue, c'est-à-dire si toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, n$  sont continues sur  $\Omega$ .

**Proposition 1.7** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ ; soit  $v \in \mathbb{R}^n$  et supposons que le segment  $\{a + tv \mid 0 \leq t \leq 1\}$  soit contenu dans  $\Omega$ . Alors

$$f(a + v) - f(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v}(a + tv) dt$$

*Preuve:* On pose  $\varphi(t) = f(a + tv)$ , pour  $0 \leq t \leq 1$ , de sorte que  $\varphi(1) - \varphi(0) = f(a + v) - f(a)$ . Il suit de 1.4(2) que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + (t+s)v) - f(a + tv)}{s} \right) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + tv)$$

et en particulier  $\varphi$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ . Donc

$$f(a + v) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v}(a + tv) dt \quad .$$

*q.e.d.*

**Théorème 1.8 (Théorème des accroissements finis)** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  ouvert; supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soient  $a, b \in \Omega$ ; supposons que le segment  $[a, b] = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$  soit contenu dans  $\Omega$ . Alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup \{ \|df_{a+t(b-a)}\| \mid 0 \leq t \leq 1 \} \cdot \|b - a\|$$

*Preuve:* Tout d'abord, du fait que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , il suit que l'application  $t \mapsto df_{a+t(b-a)}$  est continue; comme  $[0, 1]$  est compact, le sup  $\{ \|df_{a+t(b-a)}\| \mid 0 \leq t \leq 1 \}$  a un sens.

Posons  $v = b - a$ . Il résulte de 1.7 et de l'inégalité fondamentale de l'intégrale que

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial v}(a + tv) dt \right\| \leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(a + tv) \right\| dt \\ &\leq \sup \{ \|df_{a+tv}(v)\| \mid 0 \leq t \leq 1 \} \leq \sup \{ \|df_{a+tv}\| \mid 0 \leq t \leq 1 \} \cdot \|v\| \end{aligned}$$

*q.e.d.*

Une conséquence immédiate :

**Corollaire 1.9** Soient  $f : \Omega \rightarrow F$ ,  $a$  et  $b$  comme dans le théorème précédent; supposons que  $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$  et que  $\|df_x\| \leq M$ ,  $\forall x \in \overline{B}(a, r)$ . Alors si  $b \in \overline{B}(a, r)$  on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| \quad .$$

■ Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega$  un ouvert; notons par  $(x, y)$  les éléments de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , avec  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Si  $(a, b) \in \Omega$ , on note par  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  la dérivée au point  $v = 0$  de l'application  $v \mapsto f(a + v, b)$ , et par  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  la dérivée au point  $w = 0$  de l'application  $w \mapsto f(a, b + w)$ . La proposition suivante, qui est utile pour le calcul de dérivées, généralise le théorème mentionné sous 1.4(3).

**Proposition 1.10** Supposons que les dérivées  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $(x, y)$  dans un voisinage de  $(a, b)$ , existent, et que l'application  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  soit continue dans un voisinage du point  $(a, b)$ . Alors  $f$  est dérivable au point  $(a, b)$  et :

$$df_{(a,b)}(v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(w) \quad .$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} & f((a, b) + (v, w)) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(v) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(w) = \\ & \underbrace{f((a + v, b + w)) - f((a, b + w)) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(v) + f(a, b + w)}_{\text{I}} - \underbrace{f(a, b + w) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(w)}_{\text{II}} \quad . \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ; il s'agit de montrer que  $\|\text{I} + \text{II}\| \leq \varepsilon \|(v, w)\|$  si  $\|(v, w)\|$  est assez petit.

Posons  $\varphi(v) = f(a + v, b + w) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(v)$ ; alors  $\varphi(v) - \varphi(0) = \text{I}$ . Puisque  $d\varphi_v = \frac{\partial f}{\partial x}(a + v, b + w) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ,  $d\varphi_v$  dépend continûment de  $(v, w)$ , et en particulier  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a que  $d\varphi_0 = 0$ , et alors si  $\|(v, w)\|$  est assez petite,  $\|d\varphi_v\| < \varepsilon$ . Il suit de 1.9 que  $\|\text{I}\| \leq \varepsilon \|v\|$  pour  $\|(v, w)\|$  assez petite.

L'existence de  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  implique directement que  $\|\text{II}\| \leq \varepsilon \|w\|$  si  $\|w\|$  est assez petite.

*q. e. d.*

Cette proposition se généralise sans autre aux cas de plus de 2 facteurs : si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ , espace vectoriel normé,  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ , on pose

$$f_j^x(\xi_j) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1}, \dots, x_k) \quad ,$$

qui est définie pour  $\xi_j \in (\{x_1\} \times \dots \times \{x_{j-1}\} \times \mathbb{R}^{n_j} \times \{x_{j+1}\} \times \dots \times \{x_k\}) \cap \Omega$  et si  $f_j^x$  est dérivable en  $\xi_j = x_j$ , on dénote sa dérivée par  $\partial_j f_x$ . Il suit de 1.10, par induction sur  $k$ , que si  $\partial_1 f_a$  existe et que les  $\partial_j f_x$ ,  $j = 2, \dots, k$ , sont continues au voisinage de  $a$ , alors  $f$  est dérivable et

$$d_a f(h_1, \dots, h_k) = \partial_1 f_a(h_1) + \dots + \partial_k f_a(h_k) \quad .$$

Dans le cas d'une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , en utilisant la décomposition  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$ ,

on a que de  $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ .

**Corollaire 1.11** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $f = (f_1, \dots, f_p)$ ,  $a \in \Omega$ , et supposons que toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  existent et soient continues pour  $x \in \Omega$ . Alors  $f$  est dérivable en tout point  $a \in \Omega$  et la matrice de  $df_a$  est égale à

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, n}$$

■

En particulier, si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  et les dérivées  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  existent et sont continues sur  $\Omega$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  : la condition que  $f$  soit dérivable demandée dans la définition 1.6 est automatiquement satisfaite.

La proposition ci-dessous établit une propriété élémentaire, mais efficace, à laquelle nous aurons recours pour des applications au § suivant.

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et  $a \in \Omega$ . On dit que  $a$  est un minimum (respectivement maximum) local de  $f$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $f(x) \geq f(a)$  si  $x \in V$  (respectivement  $f(x) \leq f(a)$ ). On dit que  $a$  est un extremum local si c'est un minimum ou un maximum local.

**Proposition 1.12** *Soit  $f$  comme ci-dessus. Supposons que  $f$  soit dérivable au point  $a$ . Alors, si  $a$  est un extremum local de  $f$ , on a  $df_a = 0$ .*

*Preuve:* Supposons qu'il s'agisse d'un maximum local; soit  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $t > 0$  assez petit. Alors on a :

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \leq 0 \leq \frac{f(a-tv) - f(a)}{-t}$$

et comme les 2 fractions ont pour limite  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ , on doit avoir  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = 0$ , ceci pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ . Le cas d'un minimum local est semblable.

*q.e.d.*

## 1.4 Dérivées d'ordre supérieur et formule de Taylor

Nous allons définir la notion d'application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et ses dérivées d'ordre  $\ell \leq k$  par induction sur  $k$  :

**Définition 1.13** On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  si  $f$  est continue, et dans ce cas il n'y a point de dérivées à définir.

Au §1.2 on a introduit la notion d'application de classe  $\mathcal{C}^1$  (définition 1.6). Cela revient à supposer que les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  existent pour tout  $a \in \Omega$  et sont continues, ce qui entraîne par le corollaire 1.11 que  $f$  est dérivable en tout point  $a \in \Omega$ .

Supposons d'avoir défini la notion d'application de classe  $\mathcal{C}^\ell$  et les applications

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad 1 \leq i_h \leq n, h = 1, \dots, \ell$$

pour tout  $\ell \leq k-1$ . On dira que alors que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si les fonctions ci-dessus sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et on pose:

$$\forall a \in \Omega, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)(a)$$

On dit encore que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \geq 0$

Dans le cas d'une application  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , il n'y a qu'une dérivée d'ordre  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq k$ , celle qui correspond à la suite  $i_1 = \dots = i_k = 1$ . On la note  $g^{(\ell)}(a)$ , ou encore  $\frac{d^\ell g}{dt^\ell}(a)$ , si  $t$  denote la variable du domaine de définition de  $g$ . On note aussi  $g^{(0)}(a) = g(a)$ .

On peut généraliser aussi la notion de dérivée directionnelle; si  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ , on définit par induction sur  $k$ :

$$\frac{\partial^k f}{\partial v_1 \dots \partial v_k}(a) = \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial v_2 \dots \partial v_k} \right)(a) \quad .$$

Il suit du fait que  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  est linéaire en  $v$  que pour tout  $i = 1, \dots, k$ ,  $\frac{\partial^k f}{\partial v_1 \dots \partial v_i \dots \partial v_k}(a)$  est linéaire par rapport à  $v_i$ .

La définition suivante sera utile pour mieux comprendre les dérivées d'ordre supérieur.

**Définition 1.14** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application (quelconque). Pour tout  $a \in \Omega$  et  $v \in \mathbb{R}^n$  tels que  $[a, a+v] \in \Omega$  on pose:

$$\Delta_v f(a) = f(a+v) - f(a)$$

On peut regarder  $\Delta_v f$  comme un opérateur dépendant du paramètre  $v$ : à l'application  $f$  il associe une nouvelle application, celle qui à  $a$  fait correspondre l'accroissement de  $f$  en  $a$  relatif à l'accroissement  $v$  de la variable. La nouvelle application  $\Delta_v f$  ne sera pas toujours définie, mais puisque  $\Omega$  est ouvert, pour tout  $a \in \Omega$  il existe un  $r > 0$  tel que  $a+v \in \Omega$  si  $\|v\| < r$ , et donc  $\Delta_v f$  sera bien définie pour tout  $v$  assez petit. Dans ce qui suit on supposera, sans le dire explicitement chaque fois, que les accroissements  $v_i$  sont assez petits pour que les opérateurs que l'on écrira soient bien définis.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} \Delta_{v_2} \Delta_{v_1} f(a) &= \Delta_{v_2}(f(a+v_1) - f(a)) = f(a+v_1+v_2) - f(a+v_2) - (f(a+v_1) - f(a)) \\ &= f(a+v_1+v_2) - f(a+v_1) - f(a+v_2) + f(a) \quad . \end{aligned}$$

Elle représente l'accroissement (relatif à  $v_2$ ) de l'accroissement (relatif à  $v_1$ ) de  $f$  et nous sera utile pour comprendre la 2-ième dérivée comme "taux d'accroissement du taux d'accroissement"; de même, à l'aide de l'opérateur  $\Delta$  itéré  $k$  fois on obtiendra une expression de la  $k$ -ième dérivée (voir corollaire 1.16).

Notons que l'expression ci-dessus est symétrique en  $(v_1, v_2)$  :

$$\Delta_{v_2} \Delta_{v_1} f(a) = \Delta_{v_1} \Delta_{v_2} f(a) \quad .$$

**Proposition 1.15** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ; on a:

$$\Delta_{v_k} \Delta_{v_{k-1}} \dots \Delta_{v_1} f(a) = \int_0^1 \dots \left( \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(a+t_k v_k + \dots + t_1 v_1) dt_k \right) \dots dt_1 .$$

*Preuve:* On procède par induction sur  $k$ . Si  $k=1$ , cela résulte de la proposition 1.7.

Supposons que la formule soit vraie pour  $k-1$  et posons  $w_{k-1} = t_{k-1} v_{k-1} + \dots + t_1 v_1$ . On a:

$$\begin{aligned} \Delta_{v_k} \dots \Delta_{v_1} f(a) &= \Delta_{v_{k-1}} \dots \Delta_{v_1} f(a+v_k) - \Delta_{v_{k-1}} \dots \Delta_{v_1} f(a) \stackrel{\text{hyp. induction}}{=} \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial^{k-1} f}{\partial v_{k-1} \dots \partial v_1}(a+v_k+w_{k-1}) dt_{k-1} \dots dt_1 - \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial^{k-1} f}{\partial v_{k-1} \dots \partial v_1}(a+w_{k-1}) dt_{k-1} \dots dt_1 \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial v_{k-1} \dots \partial v_1}(a+v_k+w_{k-1}) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial v_{k-1} \dots \partial v_1}(a+w_{k-1}) \right) dt_{k-1} \dots dt_1 \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(a+t_k v_k + \dots + t_1 v_1) dt_k \dots dt_1 \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du cas  $k=1$  appliqué à  $\frac{\partial^k f}{\partial v_{k-1} \dots \partial v_1}(a+w_{k-1})$ .

*q.e.d.*

Le corollaire suivant exprime une dérivée d'ordre supérieur de  $f$  directement à partir de  $f$ , plutôt que de passer par des dérivations successives comme il est fait dans la définition 1.13:

**Corollaire 1.16** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ,

$$\frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(a) = \lim_{s_1, \dots, s_k \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_{s_k v_k} \dots \Delta_{s_1 v_1} f(a)}{s_k \dots s_1} \right)$$

*Preuve:* D'après 1.15:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{s_k v_k} \dots \Delta_{s_1 v_1} f(a)}{s_k \dots s_1} &= \frac{1}{s_k \dots s_1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial(s_k v_k) \dots \partial(s_1 v_1)}(a+s_k t_k v_k + \dots + s_1 t_1 v_1) dt_k \dots dt_1 \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(a+s_k t_k v_k + \dots + s_1 t_1 v_1) dt_k \dots dt_1 \end{aligned}$$

où la dernière égalité utilise le fait que  $\frac{\partial^k f}{\partial(s_k v_k) \dots \partial(s_1 v_1)}(x) = s_1 \cdots s_k \frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(x)$  (linéarité par rapport à  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ). Puisque  $\frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(x)$  est continue en  $x$ , il suffit de poser  $s_i = 0$  dans la dernière expression pour calculer la limite cherchée.

*q.e.d.*

**Corollaire 1.17** *Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $a \in \Omega$ , alors  $\frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(a)$  est symétrique en  $v_1, \dots, v_k$ , ce qui veut dire que si  $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  est une bijection, alors*

$$\frac{\partial^k f}{\partial v_k \dots \partial v_1}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial v_{\sigma(k)} \dots \partial v_{\sigma(1)}}(a) \quad .$$

*Preuve:* On a déjà remarqué que  $\Delta_{v_2} \Delta_{v_1} f(a)$  était symétrique en  $v_1, v_2$ . Il en suit que  $\Delta_{v_k} \dots \Delta_{v_1} f(a)$  est symétrique en  $v_1, \dots, v_k$ , et le corollaire suit alors de **1.16**.

*q.e.d.*

La formule suivante, dûe à Leibniz, exprime la  $\ell$ -ième dérivée de 2 fonctions d'une variable en termes des dérivées de chacune des fonctions :

**Proposition 1.18** *Soient  $\alpha, \beta : ]t_0 - r, t_0 + r[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\ell$ . Alors la  $\ell$ -ième dérivée de  $\alpha(t) \cdot \beta(t)$  a pour expression :*

$$(\alpha(t) \cdot \beta(t))^{(\ell)}(t) = \sum_{h=0}^{\ell} \binom{\ell}{h} \alpha^{(h)}(t) \cdot \beta^{(\ell-h)}(t)$$

*Preuve:* Par induction sur  $\ell$ . Pour  $\ell = 1$ , la formule se réduit à l'expression bien connue :

$$(\alpha(t) \cdot \beta(t))'(t) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t) \quad .$$

Supposons avoir montré que

$$(\alpha(t) \cdot \beta(t))^{(\ell-1)}(t) = \sum_{h=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{h} \alpha^{(h)}(t) \cdot \beta^{(\ell-1-h)}(t) \quad .$$

On dérive en appliquant la formule pour  $\ell = 1$  à chaque terme de la somme :

$$\begin{aligned} (\alpha(t) \cdot \beta(t))^{(\ell-1)}(t) &= \sum_{h=0}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{h} \left( \alpha^{(h+1)}(t) \cdot \beta^{(\ell-1-h)}(t) + \alpha^{(h)}(t) \cdot \beta^{(\ell-h)}(t) \right) \\ &= \sum_{h=0}^{\ell} \alpha^{(h)}(t) \cdot \beta^{(\ell-h)}(t) \left( \binom{\ell-1}{h-1} + \binom{\ell-1}{h} \right) \end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que :

$$\begin{aligned} \binom{\ell-1}{h-1} + \binom{\ell-1}{h} &= \frac{(\ell-1)!}{(h-1)!(\ell-1-(h-1))!} + \frac{(\ell-1)!}{h!(\ell-1-h)!} \\ &= \frac{(\ell-1)!h}{h!(\ell-h)!} + \frac{(\ell-1)!(\ell-h)}{h!(\ell-h)!} = \frac{(\ell-1)!h + (\ell-1)!(\ell-h)}{h!(\ell-h)!} = \binom{\ell}{h} \quad . \end{aligned}$$

*q.e.d.*

Suivent des résultats préliminaires à la formule de Taylor.

**Proposition 1.19** *Soit  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ ,  $t > 0$ ,  $[0, t] \subset ]a, b[$ . Supposons que*

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k)}(0) = 0 \quad .$$

Alors

$$(1-3) \quad g(t) = t^{k+1} \cdot \gamma(t)$$

où

$$(1-4) \quad \gamma(t) = \frac{1}{k!} \int_0^1 g^{(k+1)}(t \cdot u)(1-u)^k du$$

et en particulier  $\gamma(0) = \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(0)$ .

*Preuve:* Montrons l'affirmation par induction sur  $k$ . Pour  $k=0$ , on a que  $g(0) = 0$  et donc :

$$g(t) = \int_0^t g'(s) ds \quad .$$

On fait le changement de variable  $s = u \cdot t$  dans l'intégrale :

$$g(t) = \int_0^1 g'(t \cdot u) \cdot t du = t \int_0^1 g'(t \cdot u) du \quad .$$

Supposons que  $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k)}(0) = 0$  et que (1-3) et (1-4) soient vraie pour  $k-1$ :

$$g(t) = \frac{t^k}{(k-1)!} \int_0^1 g^{(k)}(t \cdot u)(1-u)^{k-1} du$$

On intègre par partie en remarquant que

$$(1-u)^{k-1} = \left( -\frac{(1-u)^k}{k} \right)'$$

et compte tenu du fait que  $g^{(k)}(0) = 0$  on obtient:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t^k}{(k-1)!} \left( \int_0^1 g^{(k)}(t \cdot u) \left( -\frac{(1-u)^k}{k} \right)' du \right) = \\ &= \frac{t^k}{(k-1)!} \left( \underbrace{g^{(k)}(t \cdot u) \cdot \left( -\frac{(1-u)^k}{k} \right)}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 g^{(k+1)}(t \cdot u) \cdot t \cdot \left( -\frac{(1-u)^k}{k} \right) du \right) = \frac{t^{k+1}}{k!} \int_0^1 g^{(k+1)}(t \cdot u)(1-u)^k du \end{aligned}$$

Puisque  $\int_0^1 (1-u)^k du = \int_0^1 u^k du = \frac{1}{k+1}$ , on a bien que  $\gamma(0) = \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(0)$ .

*q.e.d.*

**Corollaire 1.20 (Formule de Taylor pour les fonctions d'une variable)** Soit  $\varphi : ]a-r, a+r[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . Alors, pour  $|t| < r$  :

$$\varphi(a+t) = \varphi(a) + \sum_{\ell=1}^k \frac{\varphi^{(\ell)}(a)}{\ell!} t^\ell + \frac{t^{k+1}}{k!} \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(a+t \cdot u)(1-u)^k du \quad .$$

*Preuve:* On pose

$$g(t) = \varphi(a+t) - \varphi(a) - \left( \sum_{\ell=0}^k \frac{\varphi^{(\ell)}(a)}{\ell!} t^\ell \right)$$

de sorte que  $g^{(\ell)}(0) = 0, \forall \ell \leq k$  et  $g^{(k+1)}(t) = \varphi^{(k+1)}(t)$ , puis on applique **1.19** à  $g$ .

*q.e.d.*

Le cas de fonctions à plusieurs variables pourra se ramener au cas d'une variable grâce au lemme suivant. Tout d'abord on introduit une notation permettant de regrouper les dérivées supérieures qui ne diffèrent que par l'ordre des dérivations. Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  un vecteur à coefficients entiers. On pose:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad , \quad \alpha! = (\alpha_1!) \cdot \dots \cdot (\alpha_n!)$$

et si  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot h_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = k$ ; on peut lui associer la suite de  $k$  entiers  $i(\alpha) = (i(\alpha)_1, \dots, i(\alpha)_k)$  définie ainsi :

$$i(\alpha) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n \text{ fois}}) \quad .$$

Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , on pose :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{i(\alpha)_k} \dots \partial x_{i(\alpha)_1}}(a)$$

ce qui revient à dériver  $f$   $\alpha_1$ -fois par rapport à  $x_1$ ,  $\alpha_2$ -fois par rapport à  $x_2$ , et ainsi de suite, au point  $a$ .

**Lemme 1.21** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$ . Posons  $\varphi(t) = f(a + th)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Alors,  $\forall \ell \leq k$  on a:

$$\varphi^{(\ell)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_\ell \leq n} \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_\ell} \dots \partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1} \dots h_{i_\ell} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \ell} \frac{\ell!}{\alpha!} \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\alpha}(a+th) h^\alpha$$

*Preuve:* On montre d'abord la première égalité par induction sur  $\ell$ .

Pour  $\ell = 1$ , puisque  $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$ , où les  $e_i$  dénotent les vecteurs de la base standard de  $\mathbb{R}^n$ , il suit de la définition de  $\frac{\partial f}{\partial h}$  et du fait qu'elle est linéaire en  $h$  que:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(a + th) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i \quad .$$

Supposons d'avoir démontré que

$$\varphi^{(\ell-1)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{\ell-1} \leq n} \frac{\partial^{\ell-1} f}{\partial x_{i_{\ell-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1} \dots h_{i_{\ell-1}} \quad .$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi^{(\ell)}(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{\ell-1} \leq n} \left( \frac{\partial^{\ell-1} f}{\partial x_{i_{\ell-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1} \dots h_{i_{\ell-1}} \right) \right) h_i = \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_\ell \leq n} \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_\ell} \dots \partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1} \dots h_{i_\ell} \quad . \end{aligned}$$

Dans la somme ci-dessus, la suite d'indices

$$(i_1, \dots, i_\ell) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1\text{-fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2\text{-fois}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n\text{-fois}})$$

avec  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \ell$  apparaît  $\frac{\ell!}{\alpha!}$  fois à permutation près; en effet, il faut diviser le nombre  $\ell!$  de toutes les permutations de la suite  $(\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1\text{-fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2\text{-fois}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n\text{-fois}})$  par le nombre de celles qui la laissent invariante,

qui est  $(\alpha_1!) \cdot \dots \cdot (\alpha_n!) = \alpha!$ . La dernière égalité énoncée suit alors du corollaire **1.17** (symétrie des dérivées d'ordre supérieure) .

*q.e.d.*

**Théorème 1.22 (Formule de Taylor)** Soit  $f = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ ,  $a \in \Omega$  et  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$ . Alors :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{\ell=1}^k \left( \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) \cdot h^\alpha \right) + r_k(a, h)$$

où le terme  $r_k(a, h)$ , appelé terme de reste, s'écrit :

$$(1-5) \quad r_k(a, h) = (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \left( \int_0^1 \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a+uh) (1-u)^k du \right) .$$

Si  $R > 0$  est tel que  $\overline{B(a, R)} \subset \Omega$  et  $\|h\| \leq R$ , on a :

$$(1-6) \quad \|r_k(a, h)\| \leq C_k \|h\|^{k+1}$$

où  $C_k$  est une constante, et en particulier  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_k(a, h)}{\|h\|^k} = 0$ .

*Preuve:* On pose  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) = f(a + th)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . La formule (1-5) se déduit alors du corollaire 1.20 appliqué aux composantes de  $\varphi(t)$  et du lemme 1.21 appliqués aux composantes de  $f$ .

D'autre part, en reprenant (1-5), on a que

$$\|r_k(a, h)\| = \left\| \frac{1}{k!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{k+1} \leq n} h^\alpha \left( \int_0^1 \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}(a+uh) (1-u)^k du \right) \right\| .$$

Il y a  $n^{k+1}$  terme dans la somme sous l'intégrale, et  $\int_0^1 (1-u)^k ds = \frac{1}{k+1}$ . On sait que la norme donnée sur  $\mathbb{R}^n$  est équivalente à la norme  $\|h\|_\infty = \sup \{|h_i| \mid i = 1, \dots, n\}$ , donc il existe  $K$  tel que  $\|h\|_\infty \leq K \cdot \|h\|$ . Or, si  $|\alpha| = k+1$  :

$$|h^\alpha| = |h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}| \leq \|h\|_\infty^{k+1} \leq K^{k+1} \cdot \|h\|^{k+1}$$

Si on pose :

$$C_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a+uh) \right\| \mid |\alpha| = k+1, 0 \leq u \leq 1 \right\} \cdot \frac{n^{k+1}}{(k+1)!} K^{k+1}$$

l'inégalité (1-6) suit.

*q.e.d.*

### Remarques 1.23

(1) Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} .$$

On montre que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  en 0, avec toutes ses dérivées nulles en ce point. Il en résulte que tous les termes de la formule de Taylor sont nuls, sauf le terme de reste. On en déduit que  $|f(t)| \leq |t|^k$ , ceci pour  $|t|$  assez petit et pour tout  $k$ .

(2) Un théorème dû à E. Borel affirme que pour toute suite  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  de nombres réels, il existe une fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f^{(k)}(0) = a_k$ . Cela exprime l'extrême flexibilité des fonctions différentiables.

On a un énoncé analogue pour les fonctions de plusieurs variables: si l'on se donne une famille  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}$ , il existe  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,  $U \ni 0$  telle que  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) = a_\alpha$ .

- (3) Si  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et ses dérivées sont bornées sur une boule fermée de rayon fixe, on déduit de (1-5) que la série

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha$$

converge uniformément sur cette même boule vers  $f(a+h)$ . Cela peut s'appliquer à des fonctions telles que  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $e^{x+y}$ .

### Etude des extrema locaux de fonctions

**Définition 1.24** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert,  $a \in \Omega$ . On dit que  $a$  est un minimum local strict (respectivement un maximum local strict) s'il existe un ouvert  $V \subset \Omega$ ,  $V \ni a$ , tel que :

$$x \in V, x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a) \quad (\text{respectivement } f(x) < f(a)) \quad .$$

Si l'on remplace les inégalités strictes ci-dessus par des inégalités non strictes on obtient les notions de minimum local, resp. maximum local, non strict.

La formule de Taylor fournit un critère permettant parfois de décider si un point est un extremum local ou non d'une fonction.

**Proposition 1.25** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert, de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ ,  $k \geq 2$ ,  $a \in U$ . Supposons que toutes les dérivées de  $f$  d'ordre au plus  $k-1$  s'annulent en  $a$  :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) = 0 \quad \forall \alpha \text{ tel que } 1 \leq |\alpha| \leq k-1 \quad .$$

Posons

$$\varphi_k(h) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha \quad .$$

On a :

- (1) Si  $\varphi_k(h) > 0 \forall h \neq 0$ , alors  $a$  est un minimum local.
- (2) Si  $\varphi_k(h) < 0 \forall h \neq 0$ , alors  $a$  est un maximum local.
- (3) S'il existe  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\varphi_k(h_1) > 0$ ,  $\varphi_k(h_2) < 0$  alors  $a$  n'est ni un minimum ni un maximum local, même non strict.

*Preuve:* Remarquons que  $\varphi_k(h)$  est homogène de degré  $k$ , ce qui veut dire que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_k(\lambda h) = \lambda^k \varphi_k(h)$ . Soit  $h_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi_k(h_0) \neq 0$ , avec  $\|h_0\| = 1$ . Alors il suit de la formule de Taylor que

$$f(a + th_0) - f(a) = \varphi_k(th_0) + r_k(a, th_0) = t^k \left( \varphi_k(h_0) + \frac{r_k(a, th_0)}{t^k} \right) \quad .$$

Posons  $\varepsilon = |\varphi_k(h_0)|$ ; il suit de l'inégalité (1-6) de **1.22** qu'il existe  $\delta_\varepsilon$  tel que si  $|t| < \delta_\varepsilon$ ,

$$\frac{|r_k(a, th_0)|}{t^k \underbrace{\|h_0\|^k}_{=1}} < \varepsilon = |\varphi_k(h_0)|$$

et donc  $f(a + th_0) - f(a)$  a le même signe que  $\varphi_k(h_0)$ . Cela entraîne immédiatement l'affirmation (3). Pour (1) et (2), il suffit de poser

$$\varepsilon = \inf \{ |\varphi_k(h_0)| \mid \|h_0\| = 1 \} \quad ;$$

puisque  $|\varphi_k(h)|$  est continue, non nulle sur l'ensemble compact  $\{h \mid \|h\| = 1\}$ , il suit que  $\varepsilon > 0$ . La condition d'extremum local strict sera satisfaite avec  $V = \{a + th_0 \mid |t| < \delta_\varepsilon\}$ ,

*q.e.d.*

**Remarques 1.26**

- (1) Du fait que  $\varphi_k(-h) = (-1)^k \varphi_k(h)$  on déduit que :
- si la condition (1) ou la condition (2) de **1.25** sont satisfaites, alors  $k$  est pair.
  - si  $a$  est un extremum local et  $k$  est l'ordre de la première dérivée non nulle en  $a$ , alors  $k$  doit être pair, sinon on pourrait appliquer (3) de **1.25** avec  $h_1$  un vecteur tel que  $\varphi_k(h_1) \neq 0$  et  $h_2 = -h_1$ .
- (2) Il se peut qu'une fonction  $f$  ait un minimum local en restriction à chaque droite passant par le point  $a$ , sans que  $a$  soit un minimum local pour  $f$  (même discours pour les maxima).  
C'est le cas pour la fonction  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ . On voit que  $f$  admet un zéro isolé à l'origine de toute droite  $\ell$  passant par  $(0, 0)$ , et qu'elle est strictement positive sur un intervalle de  $\ell$  contenant  $(0, 0)$ . Cependant, on ne peut pas trouver une longueur d'intervalle uniforme, qui fonctionne sur toute droite. Et en fait il y a des points arbitrairement près de l'origine en lesquels  $f$  est positive, d'autres en lesquels  $f$  est négative.
- (3) Si  $k = 2$  et  $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right) \neq 0$ , alors on peut décider si  $a$  est un minimum local strict, un maximum, ou bien ni l'un ni l'autre en examinant la forme quadratique

$$q(h) = \phi_2(h) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha \quad .$$

En effet,  $q$  est soit définie positive, auquel cas  $a$  est un minimum local strict, soit définie négative, et alors  $a$  est un maximum local strict, soit elle est indéfinie, et alors  $a$  n'est ni minimum, ni maximum local, même non strict. On peut décider en mettant  $q$  sous forme diagonale.

Dans le cas de fonctions à 2 variables, si  $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right) > 0$  alors  $q$  est définie, si  $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right) < 0$  elle est indéfinie; si elle est définie, elle est définie positive si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) > 0$  (ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) > 0$ ), elle est définie négative sinon.

- (4) La fonction  $x^2 + y^4$  possède visiblement un minimum absolu en  $(0, 0)$ , mais les critères de **1.25** ne s'appliquent pas.

**2 Le théorème des fonctions implicites**

Soit  $f(x, y)$ ,  $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , une fonction de 2 variables. On peut lui associer une correspondance entre  $x$  et  $y$  de la manière suivante :

*à tout  $x$  fixé on fait correspondre les valeurs de  $y$  qui sont solution de  $f(x, y) = 0$ .*

On dira que cette correspondance entre  $x$  et  $y$  peut être rendue explicite s'il existe une fonction  $y(x)$  telle que :

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x) \quad .$$

En général, il n'est pas possible de passer de la relation implicite  $f(x, y) = 0$  à la relation explicite  $y = y(x)$ . Souvent c'est possible, mais seulement localement, au voisinage d'une solution particulière de  $f(x, y) = 0$ .

**Exemples 2.1** (1) Soit  $f(x, y) = ax + by + c = 0$  l'équation d'une droite. Si  $b \neq 0$ , on peut en tirer l'équation explicite :  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , et si  $a \neq 0$ , on en tire que  $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ . Le premier cas revient à supposer que  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ , ou encore que la droite n'est pas verticale; dans le deuxième,  $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ , ou encore que la droite n'est pas horizontale.

- (2) De l'équation implicite  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  on peut tirer 4 relations explicites :

$$(2-1) \quad y = +\sqrt{1-x^2} \quad , |x| < 1, y > 0 \quad ; \quad y = -\sqrt{1-x^2} \quad , |x| < 1, y < 0$$

$$(2-2) \quad x = +\sqrt{1-y^2} \quad , |y| < 1, x > 0 \quad ; \quad x = -\sqrt{1-y^2} \quad , |y| < 1, x < 0$$

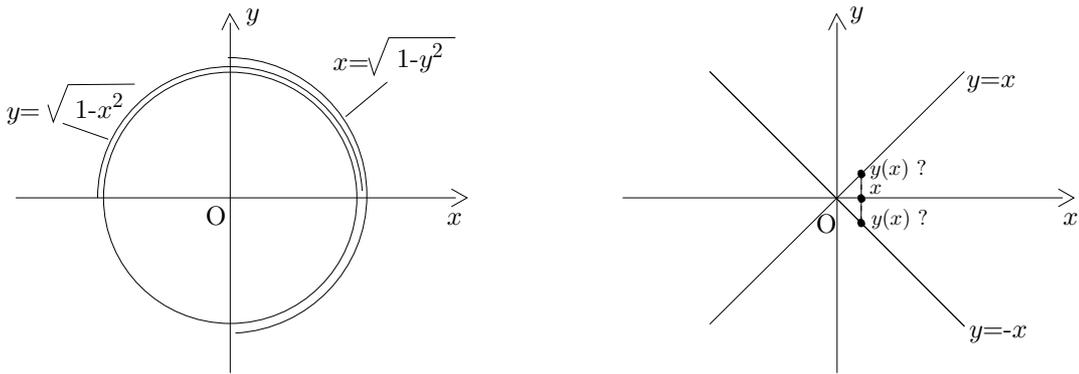


Figure II.1: Passage d'une relation implicite à une relation explicite

- (3) De la relation implicite  $x^2 - y^2 = 0$  on peut tirer les 2 relations explicites :  $y = x$  et  $y = -x$ . Ensemble, elles décrivent toutes les solutions de  $x^2 - y^2 = 0$ . Mais au voisinage de la solution  $(0, 0)$ , aucune des 2 ne donne une solution explicite complète. En fait il n'y a pas de solution explicite au voisinage de  $(0, 0)$  (voir figure II.1).

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour passer localement d'une relation implicite à une relation explicite. Considérons la décomposition en produit  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$  et notons  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{n-p})$ ,  $y = (y_1, \dots, y_p)$ .

**Théorème 2.2 (Théorème des fonctions implicites)** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  continue, admettant une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  dépendant continûment de  $(x, y) \in U$ . Supposons que  $(x_0, y_0) \in U$  soit tel que :

- i)  $f(x_0, y_0) = 0$
- ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est bijective.

Alors il existe  $r_0, R_0 > 0$  et une application continue  $g : \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{B(y_0, R_0)}$  tels que:

- i)  $\overline{B(x_0, r_0)} \times \overline{B(y_0, R_0)} \subset U$
- ii)  $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in \overline{B(x_0, r_0)}$  et pour tout  $(x, y) \in \overline{B(x_0, r_0)} \times \overline{B(y_0, R_0)}$  on a :
 
$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

Pour comprendre intuitivement cet énoncé, supposons que  $f$  soit  $\mathcal{C}^1$ ; alors, pour  $(x, y)$  proche de  $(x_0, y_0)$  :

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \text{reste}$$

et si on néglige le reste, on en déduit que :

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \Rightarrow y = y_0 - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \right)$$

à condition, bien sûr que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  soit bijective. Cela nous donne une expression approximative de  $y$  en fonction de  $x$ ; on peut espérer que :

$$y = y_0 - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \right) + \rho(x - x_0)$$

avec  $\rho(x-y_0)$  très petit si  $x$  est proche de  $x_0$ . Nous verrons plus loin (voir **2.9**) qu'en fait  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$ .

*Preuve:* Soient  $r, R > 0$  tels que  $\overline{B(x_0, r)} \times \overline{B(y_0, R)} \subset U$  et posons:

$$X_{r,R} = \left\{ \phi : \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \overline{B(y_0, R)} \mid \phi \text{ continue} \right\} \quad ;$$

c'est un sous-ensemble fermé de l'espace vectoriel complet  $(\mathcal{C}(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R}^p), \|\cdot\|_\infty)$  et donc  $X_{r,R}$  est complet pour la métrique induite par  $\|\cdot\|_\infty$  (voir **1.3.10**). Pour  $\phi \in X_{r,R}$  posons:

$$T(\phi)_{(x)} = \phi(x) - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, \phi(x))) \quad ;$$

$T(\phi)$  est une application continue de  $\overline{B(x_0, r)}$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Remarquons que

$$T(\phi) = \phi \iff f(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in \overline{B(x_0, r)}.$$

On a donc ramené la recherche d'une solution explicite à un problème de point fixe. En fait, la définition de  $T$  s'inspire de la 1ère variante de la méthode de Newton (voir **1.4.2**), que l'on retrouve lorsque  $p = 1$  et si l'on considère  $x$  comme un paramètre. Le reste de la preuve consiste pour l'essentiel à montrer que si  $r, R$  sont assez petits, alors  $T$  est une transformation contractante.

Définissons l'application auxiliaire

$$\Psi : \overline{B(x_0, r)} \times \overline{B(y_0, R)} \rightarrow \mathbb{R}^p \quad , \quad \Psi(x, y) = y - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} (f(x, y))$$

de sorte que  $T(\phi)(x) = \Psi(x, \phi(x))$  et  $\Psi(x_0, y_0) = y_0$ . On a que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \mathbb{I}_p - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

où  $\mathbb{I}_p : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  dénote l'application identité.

Choisissons  $q$  tel que  $0 < q < 1$ . Il suit de l'hypothèse que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  est continue que  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)$  l'est aussi, et puisque  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathbb{I}_p - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = 0$ , il existe  $r_1 > 0$  et  $R_0 > 0$  tel que:

$$\|x - x_0\| \leq r_1, \|y - y_0\| \leq R_0 \Rightarrow \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) \right\| \leq q$$

ce qui entraîne encore, par le théorème des accroissements finis **1.9** que

$$\|x - x_0\| \leq r_1, \|y_1 - y_0\|, \|y_2 - y_0\| \leq R_0 \Rightarrow \|\Psi(x, y_1) - \Psi(x, y_2)\| \leq q \|y_1 - y_2\|.$$

Soit  $\delta > 0$  tel que

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\Psi(x, y_0) - \Psi(x_0, y_0)\| \leq R_0(1 - q)$$

et posons  $r_0 = \inf\{r_1, \delta\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| \leq r_0, \|y - y_0\| \leq R_0 &\Rightarrow \\ \|\Psi(x, y) - y_0\| &\leq \|\Psi(x, y) - \Psi(x, y_0)\| + \|\Psi(x, y_0) - \Psi(x_0, y_0)\| \\ &\leq q \|y - y_0\| + R_0(1 - q) \leq qR_0 + R_0(1 - q) = R_0. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\phi \in X_{r_0, R_0}$ ,

$$\|T(\phi) - y_0\|_\infty = \sup \{ \|\Psi(x, \phi(x)) - y_0\|, \|x - x_0\| \leq r_0 \} \leq R_0$$

et si  $\phi_1, \phi_2 \in X_{r_0, R_0}$ ,

$$\begin{aligned} \|T(\phi_1) - T(\phi_2)\|_\infty &= \sup \{ \|\Psi(x, \phi_1(x)) - \Psi(x, \phi_2(x))\|, \|x - x_0\| \leq r_0 \} \\ &\leq q \cdot \sup \{ \|\phi_1(x) - \phi_2(x)\|, \|x - x_0\| \leq r_0 \} = q \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc  $T$  est une transformation contractante de  $X_{r_0, R_0}$  et on peut lui appliquer le théorème du point fixe (chap. I, th. 5.1, page 16). L'unique point fixe de  $T$  sera une application continue  $g : \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{B(y_0, R_0)}$  telle que

$$f(x, g(x)) = 0.$$

L'unicité du point fixe de  $T$  nous dit que  $g$  est l'unique application avec la propriété ci-dessus, cependant cela n'empêche pas a priori que pour un  $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$  il existe  $y \in \overline{B(y_0, R_0)}$ ,  $y \neq g(x)$  avec  $f(x, y) = 0$ . Mais si  $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$  est fixé, on peut considérer la transformation

$$t_x : \overline{B(y_0, R_0)} \rightarrow \overline{B(y_0, R_0)}, t_x(y) = \Psi(x, y).$$

On déduit immédiatement des estimations qu'on a vues sur  $\Psi$  que  $t_x$  est une transformation contractante, donc elle admet un unique point fixe, qui ne peut être que  $g(x)$ .

*q.e.d.*

### Remarques 2.3

- (1) Si l'on préfère travailler avec des boules ouvertes, on peut choisir  $r'_0 \leq r_0$  tel que  $g(B(x_0, r'_0)) \subset B(y_0, R_0)$ , et on aura encore :

$$\text{pour } (x, y) \in B(x_0, r'_0) \times B(y_0, R_0) \quad , \quad f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \quad .$$

- (2) Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in U$ ,  $f(x_0) = 0$  et supposons que  $df_{x_0}$  soit surjective. Alors, quitte à renuméroter les vecteurs de la base naturelle de  $\mathbb{R}^n$ , on peut supposer que

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, p, j=n-p+1, \dots, n} \neq 0 \quad .$$

Si l'on prend la décomposition  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  et l'on note  $(x', x'') \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ , on aura que  $\frac{\partial f}{\partial x''}(x_0)$  est bijective et on pourra appliquer le théorème des fonctions implicites pour exprimer  $x''$  en fonction de  $x'$  près de  $x_0 = (x'_0, x''_0)$ .

- (3) Désignons par  $Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid f(x, y) = 0\}$  l'ensemble des zéros de  $f$ . L'application  $h : B(x'_0, r_0) \rightarrow B(x''_0, R_0)$ ,  $x' \mapsto (x', g(x'))$ , est une bijection sur  $Z(f) \cap (B(x'_0, r_0) \times B(x''_0, R_0))$ ; c'est une paramétrisation locale de  $X$  au voisinage de  $x_0$  (cf. proposition 4.8(2)).

### Exemples 2.4

- (1) *Courbes planes.* Généralement, si  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , l'équation  $f(x, y) = 0$  définit une courbe plane, notée  $Z(f)$ . Si  $(x_0, y_0) \in Z(f)$  et  $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ , on dit que  $(x_0, y_0)$  est un point régulier, sinon c'est un point singulier. On appelle droite tangente à  $Z(f)$  en un point régulier  $(x_0, y_0)$  la droite d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad ;$$

elle est proche de  $Z(f)$  près de  $(x_0, y_0)$ , parce que  $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y)$  est approché par  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ . Si  $(x_0, y_0)$  est un point régulier, le théorème des fonctions implicites nous dit qu'on peut paramétrer  $Z(f) \cap B(x_0) \times B(y_0, R_0)$  par une application de la forme  $x \mapsto (x, g(x))$ ,  $x \in B(x_0, r_0)$ , si  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , ou  $y \mapsto (y, g(y))$  si  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ . La condition  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  signifie que la droite tangente à  $Z(f)$  en  $(x_0, y_0)$  n'est pas verticale, et elle se projette donc bijectivement sur l'axe  $OX$ ; le théorème des fonctions implicites nous dit qu'alors la courbe elle-même, au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , se projette bijectivement sur  $OX$  (voir figure II.3).

Par exemple, considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y^2 - x(x - 1)^2$ . On a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3x^2 + 4x - 1$$

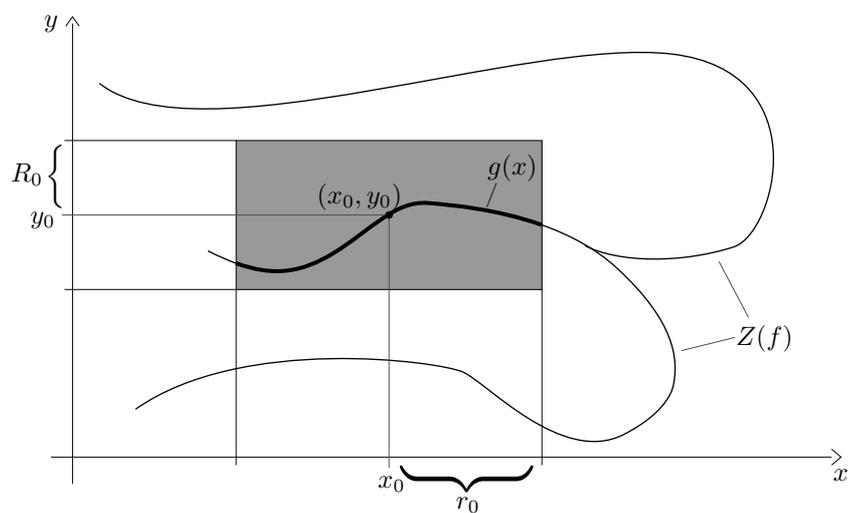
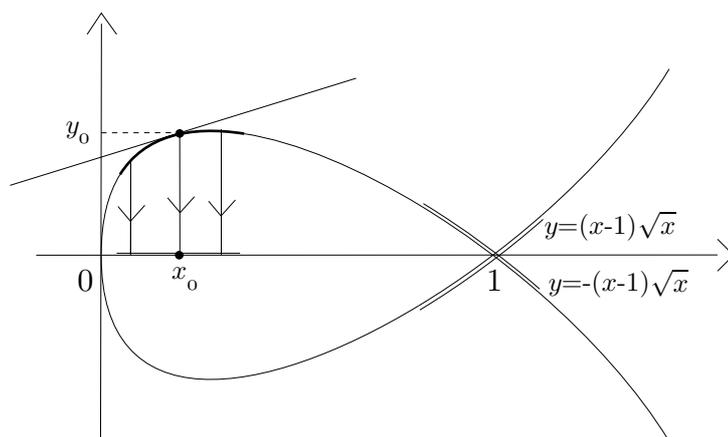


Figure II.2: Le théorème des fonctions implicites

Figure II.3: La courbe d'équation  $y^2 - x(x-1)^2 = 0$

et

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (1, 0).$$

On pourra donc résoudre explicitement  $y$  en fonction de  $x$ , sauf aux 2 points  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ . Puisque  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$ , au voisinage de ce point on pourra résoudre explicitement  $x$  en fonction de  $y$ . Par contre  $(1, 0)$  est un point singulier, et on se rend compte sur la figure **II.3** qu'il n'est pas possible de résoudre explicitement, ni  $y$  en fonction de  $x$ , ni  $x$  en fonction de  $y$ .

- (2) *Surfaces de l'espace.* Une équation de la forme  $F(x, y, z) = 0$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , définit généralement une surface de l'espace. Si  $P = (x_0, y_0, z_0) \in Z(F)$  et  $dF_P = (\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P)) \neq (0, 0, 0)$ , on dit que  $P$  est un point régulier, sinon c'est un point singulier. On appelle plan tangent à  $Z(F)$  en un point régulier  $P = (x_0, y_0, z_0)$  la plan d'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \quad ;$$

il est proche de  $Z(F)$  près de  $(x_0, y_0, z_0)$ , parce que  $F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) = F(x, y, z)$  est approché par  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$ .

Au voisinage d'un point régulier  $P$ , si par exemple  $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$ , on peut paramétrer  $Z(F)$  par  $(x, y, z) \mapsto (x, y, g(x, y))$ , pour  $(x, y)$  proche de  $(x_0, y_0)$ , où  $g(x, y)$  nous est fournie par le théorème des fonctions implicites.

Par exemple, considérons  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ,  $dF_{(x, y, z)} = (2x, 2y, -2z)$ . Donc  $(0, 0, 0) \in Z(F)$  est l'unique point singulier. Au voisinage de  $(0, 1, 1)$  on peut paramétrer  $Z(F)$  par  $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $(x, y)$  proche de  $(0, 1)$ .

- (3) *Courbes dans l'espace.* Si  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , généralement  $Z(\varphi)$  est une courbe dans l'espace. Un point  $P = (x_0, y_0, z_0) \in Z(\varphi)$  est dit régulier si  $d\varphi_P$  est de rang 2, sinon on dit qu'il est singulier. Si  $P$  est régulier, cela signifie que  $d\varphi_P^1$  et  $d\varphi_P^2$  sont linéairement indépendants; en particulier ils sont non nuls, et donc  $P$  est un point régulier sur chacune des deux surfaces  $Z(\varphi^1)$  et  $Z(\varphi^2)$ . Dire que  $d\varphi_P^1$  et  $d\varphi_P^2$  sont linéairement indépendants signifie exactement que ces plans tangents sont distincts; leur intersection est la droite tangente à  $Z(\varphi)$  en  $P$ . Au voisinage d'un point régulier, on peut paramétrer  $Z(\varphi)$  par projection sur  $OX$ ,  $OY$  ou  $OZ$ .

Par exemple prenons  $\varphi^1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ,  $\varphi^2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1$ ;  $Z(\varphi_1)$  est un cône circulaire d'axe  $OZ$ ,  $Z(\varphi_2)$  est un cylindre circulaire de rayon 1, d'axe  $OX$ . En posant  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ , on a :

$$d\varphi = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} .$$

Les  $2 \times 2$  mineurs de cette matrice valent  $8yz$ ,  $4xy$  et  $4xz$ . Pour que le rang de  $d\varphi$  soit inférieur à 2 il faut donc que 2 des 3 coordonnées  $x, y, z$  s'annulent, et on vérifie que cela ne se produit en aucun point de  $Z(\varphi)$ ; donc tous les points de  $Z(\varphi)$  sont réguliers.

Au point  $(1, 0, 1)$ , le mineur de  $d\varphi$  correspondant à la première et dernière colonne est non nul; on peut paramétrer  $Z(\varphi)$  au voisinage de ce point par  $y \mapsto (\sqrt{1 - 2y^2}, \sqrt{1 - y^2})$ .

Dans les exemples précédents, on a utilisé souvent l'adverbe "généralement", parce qu'il est des équations particulières surprenantes; par exemple, si on prend  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ , alors  $Z(F) = \{(0, 0, 0)\}$ .

## 2.1 Dépendance des racines simples d'une famille de polynômes par rapport à des paramètres

D'abord un lemme qui nous donne une estimation des racines d'un polynôme à une variable en fonction de la taille de ses coefficients. On va supposer que le polynôme est distingué, ce qui veut dire que le coefficient du terme du plus haut degré vaut 1.

**Lemme 2.5** Soit  $f(x) = x^d + \sum_{i=1}^d a_i x^{d-i}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  et supposons que  $|a_i| \leq M$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Alors, si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f(\alpha) = 0$  on a :

$$|\alpha| < 1 + M$$

*Preuve:* Si  $|\alpha| \leq 1$  il n'y a rien à démontrer. Sinon :

$$\sum_{i=1}^d \frac{1}{|\alpha|^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|^i} = \frac{1}{|\alpha|} \frac{1}{1 - 1/|\alpha|}$$

et alors

$$\begin{aligned} 0 = |\alpha^d| \left| 1 + \sum_{i=1}^d a_i \alpha^{-i} \right| &\geq |\alpha|^d \left( 1 - M \sum_{i=1}^d \frac{1}{|\alpha|^i} \right) > \\ &|\alpha|^d \left( 1 - \frac{M}{|\alpha|} \left( \frac{1}{1 - 1/|\alpha|} \right) \right) = |\alpha|^d \left( 1 - M \frac{1}{|\alpha| - 1} \right) \\ &\implies 1 - M \frac{1}{|\alpha| - 1} < 0 \implies |\alpha| < 1 + M \end{aligned}$$

et donc  $|\alpha| < 1 + M$  dans tous les cas.

*q.e.d.*

**Théorème 2.6** Soit  $F(x, \lambda) = x^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\lambda)x^i$  une famille de polynômes de degré  $d$ , où les coefficients sont des fonctions continues  $a_i(\lambda) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Supposons que pour un  $\lambda_0 \in U$  l'équation

$$F(x, \lambda_0) = 0$$

possède exactement  $\nu$  racines, toutes simples,  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$  :

$$F(x, \lambda_0) = 0 \implies \exists i \text{ t.q. } x = \alpha_i \quad , \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha_i, \lambda_0) \neq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, \nu$$

Alors il existe  $r > 0$  et  $\nu$  fonctions continues  $\gamma_i : B(\lambda_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$i) \quad \gamma_i(\lambda_0) = \alpha_i$$

$$ii) \quad F(x, \lambda) = 0, \lambda \in B(\lambda_0, r) \iff \exists i \text{ t.q. } x = \gamma_i(\lambda)$$

*Preuve:* D'après le théorème des fonctions implicites 2.2 il existe  $r > 0$ ,  $R_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, \nu$  et des fonctions continues  $\gamma_i : B(\lambda_0, r) \rightarrow ]\alpha_i - R_i, \alpha_i + R_i[$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , telles que

$$F(x, \lambda) = 0, x \in B(\alpha_i, R_i), \lambda \in B(\lambda_0, r) \iff \exists i \text{ t.q. } x = \gamma_i(\lambda) \quad .$$

Il reste à voir que si  $r$  est choisi suffisamment petit il n'y a pas d'autres racines.

Soit  $r' < r$ ; alors, puisque  $\{\lambda \mid \|\lambda - \lambda_0\| \leq r'\}$  est compact et les  $a_i(\lambda)$  continues, il existe  $M$  tel que  $|a_i(\lambda)| \leq M$  pour  $\|\lambda - \lambda_0\| \leq r'$ . Alors il suit du lemme qui précède que  $F(x, \lambda) \neq 0$  si  $\lambda \in B(\lambda_0, r')$  et  $|x| \geq 1 + M$ . Posons

$$\mu = \inf \left\{ |F(x, \lambda_0)| \mid x \in [-1 - M, 1 + M] \setminus \cup_{i=1, \dots, \nu} B(\alpha_i, R_i) \right\} \quad ;$$

alors  $\mu > 0$ . Il existe  $r'' \leq r'$  tel que  $|F(x, \lambda)| \geq \mu/2$  si  $\|\lambda - \lambda_0\| \leq r''$ ,  $x \in [-1 - M, 1 + M] \setminus \cup_{i=1, \dots, \nu} B(\alpha_i, R_i)$ ; les racines de  $F(x, \lambda)$  ne peuvent donc être que dans  $\cup_{i=1, \dots, \nu} B(\alpha_i, R_i)$ .

*q.e.d.*

Remarquons que si l'on admet des racines non simples, le théorème précédent est faux :  $x^2 + \lambda$  admet une racine pour  $\lambda = 0$ , qui disparaît dès que  $\lambda > 0$ . Aussi, le théorème est en défaut pour la famille de polynômes  $\lambda x^2 - x$  : pour  $\lambda = 0$ ,  $x = 0$  est l'unique racine, et elle est simple, mais dès que  $\lambda \neq 0$  il y a 2 racines simples :  $x = 0$  et  $x = \frac{1}{\lambda}$ .

On peut néanmoins étendre un peu la validité de **2.6** :

**Corollaire 2.7** Soit  $F(x, \lambda) = \sum_{i=0}^d a_i(\lambda)x^i$  une famille de polynômes de degré  $d$ , où les coefficients sont des fonctions continues  $a_i(\lambda) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Soit  $\lambda_0 \in U$  tel que l'on ait :

i)  $a_d(\lambda_0) \neq 0$

ii) l'équation

$$F(x, \lambda_0) = 0$$

possède exactement  $\nu$  racines, toutes simples.

Alors la conclusion du théorème 2.6 reste valable.

*Preuve:* En posant  $F'(x, \lambda) = 1/a_d(\lambda)$ , pour  $\lambda$  dans un voisinage de  $\lambda_0$ , on est ramené à 2.6.

*q.e.d.*

On en déduit une méthode pour dessiner des courbes planes décrites par une équation polynomiale en deux variable  $x$  et  $y$ , que nous allons esquisser.

Soit  $f(x, y) = \sum_{i,j=0}^d a_{i,j}x^i y^j$  un polynôme en  $x$  et  $y$  et soit

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

la courbe plane qu'il définit. Posons  $f_x(y) = f(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_d(x)y^d$ , que l'on considère comme famille de polynômes en  $y$  dépendants du paramètre  $x$ . L'idée de cette méthode est de fixer  $x \in \mathbb{R}$ , puis de chercher l'ensemble des  $y$  solutions de l'équation  $f_x(y) = 0$ ; ce sera un ensemble  $S_x \subset \mathbb{R}$  qui sera soit fini, soit égal à  $\mathbb{R}$ , si la courbe  $X$  contient la droite verticale  $\{x\} \times \mathbb{R}$ . Puis on essaie de comprendre comment  $S_x$  se comporte lorsque  $x$  varie. Des problèmes vont surgir lorsque les racines de  $f_x$  ne dépendent pas continûment de  $x$ . D'après 2.7 cela ne peut arriver que dans les cas suivants :

- lorsque  $x$  annule le coefficient de degré maximal en  $y$  :  $a_d(x) = 0$
- lorsque  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  et  $f(x, y) = 0$

En ces points, qui sont généralement en nombre fini, il faut examiner de plus près l'équation. On va noter  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  l'ensemble de ces points. Son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus \Sigma$  est constitué d'un nombre fini d'intervalles  $I_1, \dots, I_N$ . Il suit de 2.7 que  $X \cap I_h$  se compose d'une réunion finie d'arcs disjoints, chacun se projetant bijectivement sur  $I_h$ , pour  $h = 1, \dots, N$ .

**Exemple 2.8** Considérons la courbe d'équation :

$$y^2(1-x) - x(2x-1)^2 = 0 \quad .$$

On calcule que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2 - 12x^2 + 8x - 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2xy \quad .$$

Les solutions de  $f(x, y) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  sont  $(0, 0)$  et  $(1/2, 0)$ . Le coefficient du terme de degré maximum en  $y$  est  $1-x$ , nul en  $x = 1$ . Donc

$$\Sigma = \{0, 1/2, 1\} \quad .$$

On vérifie que l'équation  $f_x(y) = 0$  possède 2 solutions symétrique par rapport à l'axe  $Ox$  lorsque  $0 < x < 1/2$  et  $1/2 < x < 1$ . Le point  $(0, 0)$  n'est pas singulier, alors que  $(1/2, 0)$  l'est. Pour comprendre ce qui se passe en  $(1/2, 0)$  on regarde le développement de Taylor de  $f$  en ce point :

$$f(x, y) = 1/2y^2 - 2(x-1/2) + r_2$$

et il est donc probable que  $X$  ressemble à la paire de droites  $1/2y^2 - 2(x-1/2)^2 = 0$  au voisinage de ce point. Enfin, si  $x \rightarrow 1$ , les deux solutions de  $f_x(y) = 0$  ne peuvent que tendre vers l'infini, car  $f(1, y) = -1 \neq 0$  (figure II.4).

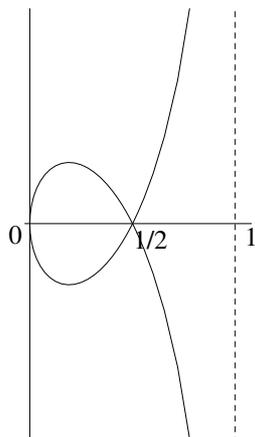
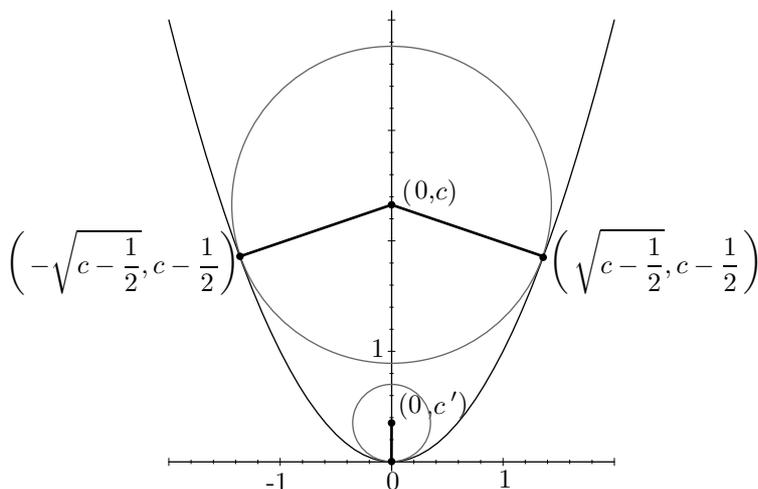
Figure II.4: La courbe d'équation  $y^2(1-x) - x(2x-1)^2 = 0$ .

Figure II.5: Exemple d'extremum lié : distance minimale d'une courbe à un point donné

## 2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la recherche d'extrema liés

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application. Posons  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\} = Z(F)$ ; si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, on aimerait chercher les extrema locaux de la restriction de  $f$  à  $X$  : on dit que  $a \in X$  est un maximum (resp. minimum) local de  $f|_X$  si  $\exists r > 0$  tel que  $x \in X, d(x, a) < r \Rightarrow f(x) \leq f(a)$  (resp.  $f(x) \geq f(a)$ ). On dit alors que  $a$  est un extremum local de  $f$ , lié aux conditions  $F_i(x) = 0, i = 1, \dots, k$ .

Par exemple, cherchons les points de la parabole  $y = x^2$  qui sont à distance minimale du point  $P = (0, c)$ . Dans ce cas,  $F(x, y) = y - x^2$ , et on peut prendre pour  $f$  la fonction  $f(x, y) = x^2 + (y - c)^2$ , c'est-à-dire le carré de la distance de  $(x, y)$  à  $P$ ; minimiser  $f(x, y)$  ou la distance proprement dite  $\sqrt{f(x, y)}$  revient au même, mais  $f(x, y)$  est plus simple à écrire. On peut résoudre directement ce problème à l'aide de la paramétrisation globale de  $Z(F)$  :  $\alpha(x) = (x, x^2)$ ; alors  $f(\alpha(x)) = x^2 + (x^2 - c)^2 = \phi(x)$ ,  $\phi'(x) = 2x + 2(x^2 - c)2x = 2x(2x^2 - 2c + 1)$ .

On doit chercher la valeur de  $x$  pour laquelle  $\phi(x)$  est minimale, et alors  $\phi'(x) = 0$ , d'où  $x = 0$  ou  $x = \sqrt{c - 1/2}$  si  $c > 1/2$ . Or  $\phi(0) = c^2$ ,  $\phi(\sqrt{c - 1/2}) = c - 1/4$  ( $c \geq 1/2$ ). On vérifie que  $c^2 \geq c - 1/4$  si  $c \geq 1/2$ ; donc que la distance minimale est atteinte par le point  $(0, 0)$  si  $c < 1/2$ , sinon par les deux points  $(\pm\sqrt{c - 1/2}, c - 1/2)$  (figure II.5).

Dans cet exemple, on s'est ramené, à l'aide d'une paramétrisation de la courbe  $g(x, y) = 0$ , à la recherche de points critiques d'une fonction d'une variable. En général, il n'est pas possible d'explicitement

une paramétrisation d'une courbe décrite par une équation : le théorème des fonctions implicites est un pur théorème d'existence. Néanmoins, un complément à ce théorème va nous donner l'expression de la première dérivée d'une paramétrisation locale de la courbe  $g = 0$ ; c'est ce que va exploiter la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui permet sous certaines conditions de donner des équations des extremas d'une fonction liés à une contrainte.

**Théorème 2.9 (Complément au théorème des fonctions implicites)** *Sous les hypothèses du théorème 2.2 (théorème des fonctions implicites), si  $f$  est dérivable en  $(x_0, y_0)$ , alors  $g$  est dérivable en  $x_0$  et*

$$(3) \quad dg_{x_0} = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right).$$

De plus, si  $f$  est de classe  $C^r$ ,  $g$  l'est aussi.

*Preuve:* En dérivant les 2 membres de l'équation:

$$f(x, g(x)) = 0$$

on obtient que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(dg_{x_0}) = 0$$

et de là on tire que

$$dg_{x_0} = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

ceci à condition que l'on sache déjà que  $g$  est dérivable en  $x_0$ . C'est précisément ce que l'on doit commencer par démontrer, mais le calcul précédent explique d'où vient la formule énoncée.

Pour montrer que  $g$  est dérivable en  $x_0$ , donnons un accroissement  $h$  à la variable  $x$  en  $x_0$ , un accroissement  $\Delta g = g(x_0 + h) - g(x_0)$  à  $y$  en  $y_0$  et utilisons la dérivabilité de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  et le fait que  $f(x, g(x)) = 0$ :

$$(4) \quad 0 = f(x_0 + h, g(x_0 + h)) - f(x_0, g(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta g) + r(h, \Delta g)$$

avec  $r(h, \Delta g) \leq \varepsilon(\|h\| + \|\Delta g\|)$  si  $\|h\|, \|\Delta g\| \leq \delta_\varepsilon$ , où l'on prend partout la norme  $\| \cdot \|_1$ . Puisque  $g$  est continue

$$\|h\| \leq \delta_\varepsilon^1 \Rightarrow \|\Delta g\| \leq \delta_\varepsilon$$

donc si  $\delta_\varepsilon^2 = \inf \{ \delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon^1 \}$ ,

$$(5) \quad \|h\| \leq \delta_\varepsilon^2 \Rightarrow r(h, \Delta g) \leq \varepsilon(\|h\| + \|\Delta g\|) \quad .$$

Par ailleurs, on déduit de (4) que

$$(6) \quad \Delta g = - \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(h) + r(h, \Delta g) \right)$$

et donc, en supposant que  $\varepsilon < 1$ ,

$$\|h\| \leq \delta_\varepsilon^2 \Rightarrow \|\Delta g\| \leq \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right\| \left( \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| + 1 \right) \|h\| + \varepsilon \|\Delta g\| \right)$$

où cela va sans dire que les dérivées sont prises au point  $(x_0, y_0)$ .

Posons  $C = \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right\| \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| + 1 \right)$ ; en prenant  $\varepsilon = \frac{1}{2 \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right\|}$  et en appelant  $\delta^3$  la valeur correspondante de  $\delta_\varepsilon^2$ , on obtient que

$$(7) \quad \begin{aligned} \|h\| \leq \delta^3 &\Rightarrow \|\Delta g\| \leq C \|h\| + \frac{1}{2 \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right\|} \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right\| \|\Delta g\| = C \|h\| + \frac{1}{2} \|\Delta g\| \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \|\Delta g\| \leq C \|h\| \Rightarrow \|\Delta g\| \leq 2C \|h\| \end{aligned}$$

Si on reprend (6) on voit que

$$(8) \quad \Delta g = -\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(h) \right) + \rho(h) \text{ où } \rho(h) = -\frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \left( r(h, \Delta g) \right)$$

et il suit de (5), (7) et (8) que

$$\|h\| \leq \inf \{ \delta_\varepsilon, \delta^3 \} \Rightarrow \|\rho(h)\| \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial f^{-1}}{\partial y} \right\| (1 + 2C) \|h\| \quad ;$$

cela montre que  $g$  est dérivable et que sa dérivée est donnée par (3).

Si l'on suppose  $f$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont de classe  $C^{r-1}$ . L'expression (3) est valable sur un ouvert  $U' \ni x_0$  et montre que  $dg$  est de classe  $C^{r-1}$  et donc que  $g$  est de classe  $C^r$ .

*q.e.d.*

Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application de classe  $C^1$ . Si  $x_0 \in Z(F)$  et que  $dF_{x_0}$  soit surjective, on dit que  $x_0$  est un point régulier de  $Z(F)$ , sinon c'est un point singulier (ceci généralise la terminologie introduite dans les exemples (2.4) .) Si donc  $x_0$  est un point régulier de  $F$ , on peut appliquer la remarque 2.3(3) pour avoir une paramétrisation de  $X = Z(F)$  au voisinage de  $x_0$ , de la forme  $x' \mapsto (x', g(x'))$ , où  $x' \in \mathbb{R}^{n-k}$  est proche de  $x'_0$ ; on pose  $h(x') = (x', g(x'))$ , et il suit de 2.9 que  $h$  est de classe  $C^1$ . On définit l'espace tangent à  $X$  au point  $x_0$  :

$$TX_{x_0} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid dF_{x_0}(v) = 0\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - k$  (dans les exemples 2.4 c'est en fait le translaté par  $x_0$  de  $TX_{x_0}$  que l'on a appelé espace tangent).

**Proposition 2.10** *On a :*

$$TX_{x_0} = \text{Im}(dh_{x'_0})$$

et :

$$TX_{x_0} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ des suites } \{x_n\} \subset X, \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R} \text{ telles que } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \cdot (x_n - x_0) = v \right\}$$

Notons qu'en particulier, la deuxième expression de  $TX_{x_0}$  ne fait pas intervenir l'équation  $F$  de  $X$ .

*Preuve:* La dérivée de  $h$  s'écrit :

$$dh_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{n-k} \\ dg_{x_0} \end{pmatrix}$$

et on voit qu'elle est injective, et donc  $\text{Im}(dh_{x_0})$  est de dimension  $n - k$ . Puisque  $F(h(x')) = 0$ ,  $dF_{x_0} \circ dh_{x'_0} = 0$ , et donc  $\text{Im}(dh_{x'_0}) \subset \text{Ker}(dF_{x_0}) = TX_{x_0}$  et puisque ces espaces ont même dimension  $n - k$ , ils coïncident.

Si  $v \in TX_{x_0}$ , alors  $\exists w \in \mathbb{R}^{n-k}$  tel que  $v = dh_{x'_0}(w)$ . Soit  $x_n = h(x'_0 + \frac{1}{n} \cdot w)$  et  $\lambda_n = n$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x'_0 + \frac{1}{n} \cdot w\right)\right) = h(x'_0) = x_0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n(x_n - x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n(h(x'_0 + \frac{1}{n} \cdot w) - h(x'_0))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(x'_0 + \frac{1}{n} \cdot w) - h(x'_0)}{\frac{1}{n}} = dh_{x'_0}(w) = v$$

D'autre part, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \cdot (x_n - x_0) = v$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_n \cdot (F(x_n) - F(x_0)) = \lambda_n \cdot (dF_{x_0}(x_n - x_0)) + \lambda_n \cdot r(x_n - x_0) \\ &= dF_{x_0}(\lambda_n(x_n - x_0)) + \frac{r(x_n - x_0)}{\|x_n - x_0\|} \cdot \lambda_n \cdot \|x_n - x_0\| \rightarrow dF_{x_0}(v) \end{aligned}$$

La proposition 1.12 se généralise comme suit.

**Proposition 2.11** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, et soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $X = Z(F)$  et  $x_0 \in X$  un point régulier. Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ; pour que  $x_0$  soit un extremum local de  $f|_X$  il est nécessaire que :

$$df_{x_0} | TX_{x_0} = 0 \quad .$$

*Preuve:* Soit  $h(x')$  la paramétrisation locale de  $X$  au voisinage de  $x_0$ . Alors dire que  $x_0$  est un extremum local de  $f|_X$  équivaut à dire que  $x'_0$  est un extremum local de  $f \circ h$ , ce qui, d'après la proposition 1.12 implique que  $d(f \circ h)_{x'_0} = 0$ . Mais  $d(f \circ h)_{x'_0} = df_{x_0} \circ dh_{x'_0}$ ; cela entraîne donc que  $df_{x_0} | \text{Im}(dh_{x'_0}) = df_{x_0} | TX_{x_0} = 0$ . q.e.d.

Voici un théorème qui traduit le résultat précédent en une méthode de calcul.

**Théorème 2.12 (Méthode des multiplicateurs de Lagrange (1736–1813))** Soient  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ , et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $F, f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Posons  $X = F^{-1}(0)$  et soit  $a \in X$ ; supposons que  $dF_a$  soit surjective. Alors, une condition nécessaire pour que  $f|_X$  ait un extremum local en  $a$  est qu'il existe  $k$  nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$df_a = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot F'_i(a)$$

où  $F'_i(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  dénote la dérivée de  $F_i$  au point  $a$ . En coordonnées, cela s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad \heartsuit$$

Notons que pour la recherche des extremas liés nous aurons :

$$\begin{aligned} (2-3) \quad n + k \text{ inconnues} & \quad : a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k \\ (2-4) \quad n + k \text{ équations} & \quad : F_1(a) = \dots = F_k(a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a), \quad j = 1, \dots, n \quad . \end{aligned}$$

Il est donc raisonnable d'espérer résoudre ce système d'équations.

Les points  $a \in \Omega$  qui satisfont les  $n + k$  équations ci-dessus, sans préjuger de leur qualité de maximum ou minimum local lié, sont appelés *points stationnaires*. Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Lorsque  $n = 2$  et  $k = 1$ , les niveaux de  $f$  et  $F$  sont généralement des courbes. La condition du théorème devient  $\text{grad}(f)_a = \lambda \cdot \text{grad}(F)_a$ , donc les 2 courbes  $F(x_1, x_2) = 0$  et  $f(x_1, x_2) - f(a) = 0$  ont même tangente en  $a$ ; on le constate par exemple sur les figures II.5 et II.6.

La démonstration du théorème repose sur un lemme d'algèbre linéaire :

**Lemme 2.13** Soient  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une application linéaire surjective et  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. Pour qu'il existe une application linéaire  $\Lambda : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\beta = \Lambda \circ \alpha$ , il faut et il suffit que  $\text{Ker}(\alpha) \subset \text{Ker}(\beta)$ .

*Preuve:* On peut représenter la situation sur un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^{n-k} \\ \beta \searrow & & \swarrow \Lambda \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Si  $\beta = \Lambda \circ \alpha$ , évidemment  $\text{Ker}(\alpha) \subset \text{Ker}(\beta)$ .

Réciproquement, supposons que l'inclusion précédente soit vraie. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n \simeq \text{Ker}(\alpha) \oplus K'$ , où  $K'$  désigne un supplémentaire à  $\text{Ker}(\alpha)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et alors  $\alpha|_{K'} : K' \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n-k}$ . On pose:  $\Lambda = \beta \circ (\alpha|_{K'})^{-1}$ ; on en tire que  $\Lambda \circ (\alpha|_{K'}) = \beta|_{K'}$ . Comme  $K'$  est supplémentaire à  $\text{Ker}(\alpha)$  et que autant  $\Lambda \circ \alpha$  que  $\beta$  s'annulent sur  $\text{Ker}(\alpha)$ , ces 2 applications linéaires sont égales.

q.e.d.

*Preuve de 2.12* Le lemme nous dit qu'il existe une application linéaire  $\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $df_a = \Lambda \circ dF_a$ . Si on exprime cette relation sous forme matricielle, en appelant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients de la matrice de  $\Lambda$ , on obtient les équations ( $\heartsuit$ ).

*q.e.d.*

### Exemples 2.14

- (1) Soit  $f(x, y) = xy$  et cherchons ses valeurs maximales et minimales sur le cercle  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ; on sait qu'elles existent parce que le cercle est compact. Cherchons d'abord ses points stationnaires :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = y^2 = 1/2 \Rightarrow a = (\pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{1/2})$$

Il y a donc quatre points stationnaires.  $f(\pm(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})) = 1/2$ ,  $f(\pm(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})) = -1/2$ . Donc la valeur maximale est  $1/2$ , la valeur minimale est  $-1/2$  (figure II.6).

- (2) Cherchons les valeurs maximales et minimales de la fonction  $f(x, y, z) = x + y + z$  sur l'ellipsoïde  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$ . De nouveau, on sait à priori que  $f$  admet une valeur minimale et maximale, parce que l'ellipsoïde est compact. On a  $\text{grad}(f) = (1, 1, 1)$ ,  $\text{grad}(F) = (x, \frac{y}{2}, \frac{z}{3})$  et on doit résoudre le système d'équations :

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \lambda x \\ 1 = \frac{1}{2}\lambda y \\ 1 = \frac{1}{3}\lambda z \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x}, y = 2x, z = 3x \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{4} + \frac{9x^2}{6} = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

Les points stationnaires sont donc  $P = \sqrt{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$  et  $Q = -\sqrt{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ . Donc  $f(P) = 2\sqrt{3}$  est la valeur maximale,  $f(Q) = -2\sqrt{3}$  est la valeur minimale de  $f$  sur l'ellipsoïde.

- (3) Si au lieu de l'ellipsoïde on prend la quadrique  $h(x, y, z) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$ , des calculs semblables à ceux ci-dessus montrent qu'il y a 2 points stationnaires  $P' = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})$  et  $Q' = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})$ , et  $f(P') = -2\sqrt{2}$ ,  $f(Q') = 2\sqrt{2}$ . Mais  $f$  n'a ni valeur maximale, ni minimale sur cette surface! En effet, prenons  $z_0 = \sqrt{6}$ ; alors, les points  $(x, \sqrt{2}x, z_0) \in Z(h)$ , et  $f(x, \sqrt{2}x, z_0) = x(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{6}$  prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
- (4) La méthode ne permet pas toujours de trouver des solutions, même si elles existent. Prenons la parabole semi-cubique (figure II.7), d'équation  $g(x, y) = y^2 - x^3 = 0$  et cherchons la distance minimale du point  $P = (-1, 0)$  à cette courbe, en appliquant la méthode de Lagrange à  $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ , qui est la distance au carré de  $(x, y)$  à  $(-1, 0)$ , soumise à la contrainte  $F(x, y) = 0$ . On voit tout de suite que la distance minimale est atteinte au point  $(0, 0)$ , et elle vaut 1. Mais  $\text{grad}(F)_{(0,0)} = (0, 0)$ ,  $\text{grad}(f)_{(0,0)} = (1, 0)$ ; on ne pourra pas trouver de  $\lambda$  tel que  $\text{grad}(f)_{(0,0)} = \lambda \cdot \text{grad}(F)_{(0,0)}$ .

### Une condition suffisante pour un extremum local lié

Reprenons les notations et les hypothèses de la proposition 2.11 et du théorème 2.12. Supposons que la condition nécessaire pour que  $f$  ait un extremum en  $x_0$  soit satisfaite; alors on peut écrire :

$$df_{x_0} = \Lambda \circ dF_{x_0}$$

où  $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  a pour matrice  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Notons que l'on déduit de l'égalité précédentes que :

$$\Lambda = \left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x_0) \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x''}(x_0) \right)$$

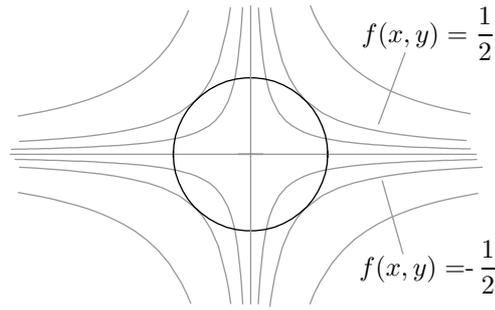


Figure II.6: Valeurs extrémales de  $x \cdot y$  sur le cercle  $x^2 + y^2 - 1 = 0$

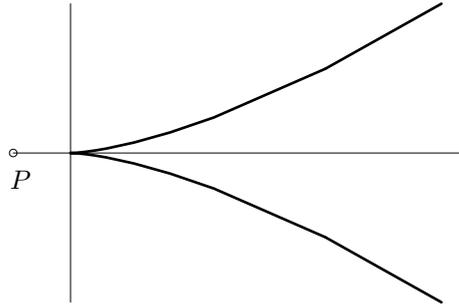


Figure II.7: La parabole semi-cubique, d'équation  $y^2 - x^3 = 0$

ce qui montre comment  $\Lambda$  est déterminé par  $f$  et  $F$ . Pour essayer de déterminer si  $x_0$  est un extremum local de  $f|X$ , on peut appliquer les considérations que l'on a rappelé dans **1.26** aux dérivées d'ordre deux de  $f \circ h$ . Il faut donc examiner la forme quadratique :

$$q(v) = \sum_{i,j=1}^{n-k} \frac{\partial^2(f \circ h)}{\partial u_i \partial u_j}(x'_0) u_i u_j \quad .$$

Il s'agit en fait de calculer ces dérivées en termes de dérivées de  $f$  et  $F$ . On applique plusieurs fois la formule de dérivation des fonction composées :

$$(2-5) \quad \frac{\partial f \circ h}{\partial u_i}(x'_0) = \sum_{s=1, \dots, n} \frac{\partial f}{\partial x_s}(h(x'_0)) \cdot \frac{\partial h_s}{\partial u_i}(x'_0)$$

et donc

$$(2-6) \quad \frac{\partial^2(f \circ h)}{\partial u_j \partial u_i}(x'_0) = \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s}(x_0) \cdot \frac{\partial h_t}{\partial u_j}(x'_0) \cdot \frac{\partial h_s}{\partial u_i}(x'_0) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_s}(x_0) \cdot \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_j \partial u_i}(x'_0) \quad .$$

De même, puisque  $F \circ h = 0$ , on voit que :

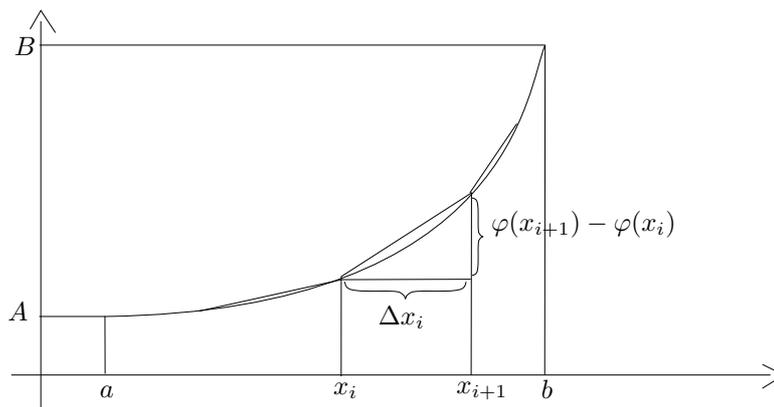
$$(2-7) \quad \frac{\partial^2(F \circ h)}{\partial u_j \partial u_i}(x'_0) = \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_t \partial x_s}(x_0) \cdot \frac{\partial h_t}{\partial u_j}(x'_0) \cdot \frac{\partial h_s}{\partial u_i}(x'_0) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_s}(x_0) \cdot \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_j \partial u_i}(x'_0) = 0 \quad .$$

et en appliquant  $\Lambda$  aux deux membres de la dernière égalité de **(2-3)**, compte tenu de **(2-1)** on voit que :

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_s}(x_0) \cdot \frac{\partial^2 h_s}{\partial u_j \partial u_i}(x'_0) = -\Lambda \left( \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_t \partial x_s}(x_0) \cdot \frac{\partial h_t}{\partial u_j}(x'_0) \cdot \frac{\partial h_s}{\partial u_i}(x'_0) \right)$$

et donc si on pose, pour  $w \in \mathbb{R}^n$  :

$$Q(w) = \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s}(x_0) \cdot w_t w_s - \Lambda \left( \sum_{s,t=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_t \partial x_s}(x_0) \cdot w_t w_s \right)$$

Figure II.8: Calcul de la longueur du graphe de  $\varphi$ 

on voit que  $q(v) = Q(dh_{(x'_0)}(v))$ . On peut donc dire que si la forme quadratique  $Q$  restreinte à  $TX_{x_0}$  :

- est définie positive (i.e.  $Q(w) > 0$  pour tout  $w \in TX_{x_0}$ ,  $w \neq 0$ ), alors  $x_0$  est un minimum local de  $f|X$
- si elle est définie négative, alors  $x_0$  est un maximum local de  $f|X$
- s'il existe  $w_1, w_2 \in TX_{x_0}$  avec  $Q(w_1) > 0$ ,  $Q(w_2) < 0$ , alors  $x_0$  n'est ni un minimum, ni un maximum local de  $f|X$
- dans les cas restant, on ne peut pas décider de la nature du point stationnaire  $x_0$  uniquement à l'aide de  $Q$ .

### 3 Éléments de calcul des variations

On aimerait aborder des problèmes du type suivant : parmi les fonctions  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , qui vérifie la condition au bord  $\varphi(a) = A$ ,  $\varphi(b) = B$ , trouver celles pour lesquelles l'intégrale suivante

$$F(\varphi) = \int_a^b f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$$

est minimale, respectivement maximale, où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, et  $\Omega \ni (x, \varphi(x), \varphi'(x))$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Traditionnellement, on appelle  $F(\varphi)$  une *fonctionnelle* et le  $\varphi$  cherché une *extremale* de cette fonctionnelle.

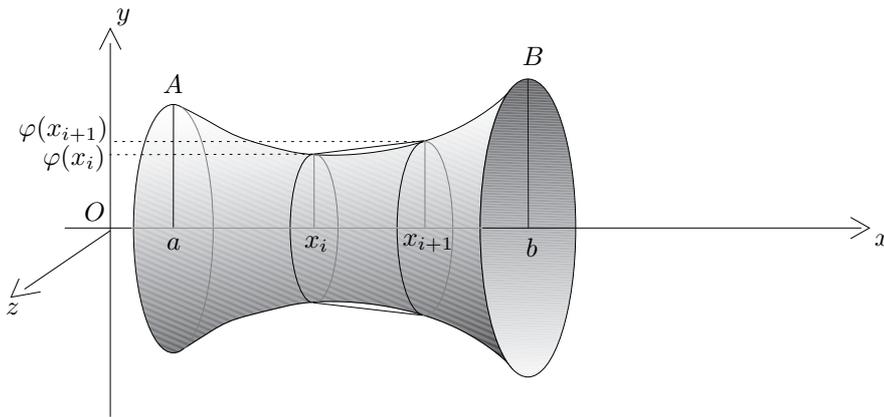
#### Exemples 3.1

- (1) Soient  $P = (a, A), Q = (b, B) \in \mathbb{R}^2$ . Trouver la courbe réalisant la plus courte distance entre  $P$  et  $Q$ . On peut supposer que  $a < b$  et que la solution est donnée par le graphe d'une fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$ . La longueur du graphe de  $\varphi$  est donnée par l'intégrale :

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad .$$

En effet, si  $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$  est un partage de  $[a, b]$ , la longueur du segment joignant  $(x_i, \varphi(x_i))$  à  $(x_{i+1}, \varphi(x_{i+1}))$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , vaut, d'après le théorème de Pythagore :

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta \varphi_i^2} \quad , \quad \text{où} \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad , \quad \Delta \varphi_i = \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)$$

Figure II.9: Calcul de l'aire de la surface engendrée par rotation du graphe de  $\varphi$ 

et la longueur de la courbe polygonale réunion de ces segments vaut

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta \varphi_i^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \varphi_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

ce qui tend vers  $\ell(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$  lorsque la maille du partage  $\sup \{\Delta x_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$  tend vers 0. On a donc ramené le problème à la recherche de fonctions  $\varphi$  qui minimisent la fonctionnelle  $F(\varphi)$ .

- (2) On place un système de coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$  dans l'espace. Etant donné deux points  $P = (a, B)$  et  $Q = (b, B)$  dans le plan  $(x, y)$ , trouver  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(a) = A$ ,  $\varphi(b) = B$ , de sorte que l'aire  $A(\varphi)$  de la surface obtenue par rotation du graphe de  $\varphi$  autour de l'axe  $Ox$  soit minimale. Cette aire peut s'exprimer ainsi:

$$A(\varphi) = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \quad .$$

En effet, rappelons que l'aire latérale d'un tronc de cône est égale à  $2\pi \frac{(R_1 + R_2)}{2} r$ , où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de la base inférieure et supérieure respectivement et  $r$  est la largeur du côté. Si  $a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$  est un partage de l'intervalle  $[a, b]$ , l'aire de la surface engendrée par rotation de la ligne polygonale constituée par les segments d'extrémités  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  est égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} 2\pi \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta \varphi_i^2} \frac{(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))}{2} = \\ & 2\pi \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} (\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})) \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \varphi_i}{\Delta x_i}\right)^2} \end{aligned}$$

ce qui tend vers l'expression voulue lorsque les mailles du partage tendent vers 0.

Supposons que l'on veuille trouver un  $\varphi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui soit une extrémale de la fonctionnelle  $F(\varphi) = \int_a^b f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$ , et vérifiant  $\varphi_0(a) = A$ ,  $\varphi_0(b) = B$ . Posons :

$$E = \{\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \theta \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \theta(a) = \theta(b) = 0\} \quad .$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut considérer comme l'espace des déformations de  $\varphi_0$  : pour voir que  $\varphi_0$  est une extrémale de  $F$ , il suffit d'étudier les valeurs de  $F(\varphi_0 + t \cdot \theta)$ , pour  $\theta \in E$  et  $t \in \mathbb{R}$  proche de 0.

**Proposition 3.2** Soit  $\theta \in E$  et, pour  $t \in \mathbb{R}$  proche de 0 posons

$$h_\theta(t) = F(\varphi_0 + t \cdot \theta) = \int_a^b f(x, \varphi_0(x) + t \cdot \theta(x), \varphi'_0(x) + t \cdot \theta'(x)) dx \quad .$$

Alors

$$h'_\theta(0) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \cdot \theta(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \cdot \theta'(x) \right\} dx \quad .$$

*Preuve:* On dérive l'expression définissant  $h_\theta(t)$  sous le signe intégrale.

*q.e.d.*

**Corollaire 3.3** Si  $\varphi_0$  est une extrémale de  $F$ , alors

$$\heartsuit \quad \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \cdot \theta(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \cdot \theta'(x) \right\} dx = 0 \quad \forall \theta \in E$$

et si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors :

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \right) \right\} \cdot \theta(x) dx = 0 \quad \forall \theta \in E$$

*Preuve:* Si  $\varphi_0$  est une extrémale de  $F$ , alors pour tout  $\theta \in E$   $0 \in \mathbb{R}$  est un extremum pour  $h_\theta(t)$ , et donc, d'après **1.12**,  $h'_\theta(0) = 0$ , ce qui implique l'équation  $\heartsuit$  par la proposition **3.2**.

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \cdot \theta'(x) dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(t, \varphi_0(t), \varphi'_0(t)) \cdot \theta(t)}_{=0} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \right) \cdot \theta(x) dx$$

et la deuxième égalité en suit.

*q.e.d.*

**Lemme 3.4** Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et supposons que

$$\int_a^b g(x)\theta(x) dx = 0 \quad \forall \theta \in E \quad .$$

Alors  $g$  est identiquement nulle.

*Preuve:* Si  $g$  est identiquement nulle sur  $]a, b[$  alors  $g$  est identiquement nulle sur  $[a, b]$ . Donc si la conclusion du lemme est fautive, il existe  $x_0 \in ]a, b[$  avec  $g(x_0) \neq 0$ . On peut supposer, quitte à remplacer  $g$  par  $-g$ , que  $g(x_0) > 0$ . Puisque  $g$  est continue, il existe  $\delta > 0$  tel que  $g(x) \geq \frac{g(x_0)}{2}$  si  $|x - x_0| \leq \delta$ , et on peut supposer que  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$ . On vérifie facilement que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+1)^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  (voir figure **II.10**); posons  $\theta(x) = f\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)$ . Alors  $\theta$  est aussi  $\mathcal{C}^1$ ,  $\theta(a) = \theta(b) = 0$  et  $\theta(x) \geq 0$ . Donc  $g(x) \cdot \theta(x) \geq 0$ , mais  $g \cdot \theta$  est non identiquement nulle, et elle est continue. Alors, d'après le lemme **I.1.3**

$$\int_a^b g(x)\theta(x) dx > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.

*q.e.d.*

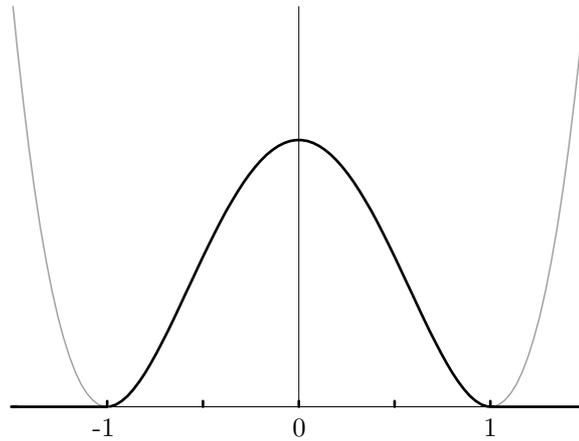


Figure II.10: Graphe de la fonction "en cloche"  $(x - 1)^2(x + 1)^2$ , prolongée par 0 en dehors de  $[-1, 1]$

**Remarque 3.5** On peut même construire des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  du même type que la fonction  $\theta(x)$  de la preuve du lemme précédent en posant :

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\delta^2 - (x-x_0)^2}} & \text{si } |x - x_0| < \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on démontre qu'elle est  $\mathcal{C}^\infty$  de manière analogue à l'exemple que l'on trouve dans [4, chap. III(7.12)] où l'on traite le cas de  $f(x) = e^{-1/x^2}$  si  $x > 0$ ,  $f(x) = 0$  sinon.

**Théorème 3.6** *Supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$ ; une condition nécessaire pour que  $\varphi_0$  soit une extrémale de la fonctionnelle :*

$$\int_a^b f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$$

*est que l'équation différentielle suivante, appelé équation d'Euler-Lagrange, soit satisfaite :*

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x)) \right) = 0$$

*et si  $f$  ne dépend pas de  $x$ , alors l'équation suivante est satisfaite :*

$$(II) \quad \varphi'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\varphi_0(x), \varphi'_0(x)) - f(\varphi_0(x), \varphi'_0(x)) = \text{Constante}$$

*Preuve:* (I) suit de **3.3** et **3.4**.

Si  $f$  ne dépend que de  $y$  et  $z$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$  et donc :

$$\frac{d}{dx} \left( \varphi'_0 \frac{\partial f}{\partial z} - f \right) = \varphi''_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \varphi'_0 \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'_0 - \frac{\partial f}{\partial z} \varphi''_0 = \varphi'_0 \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

où les dérivées sont toutes prises au point  $(x, \varphi_0(x), \varphi'_0(x))$ ; d'où l'on tire (II).

*q.e.d.*

**Exemples 3.7** On reprend les exemples du début de ce paragraphe; nous nous contenterons d'utiliser les équations d'Euler-Lagrange pour déterminer les solutions possibles, sans montrer qu'il s'agit effectivement de minima (voir [2] pour une analyse plus complète de ces problèmes.)

- (1) Pour trouver la plus courte distance entre  $P = (a, A)$  et  $Q = (b, B)$ , on doit minimiser la fonctionnelle :

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \quad .$$

Ici on a :

$$f(x, y, z) = f(z) = \sqrt{1 + z^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

et on déduit de **3.6(II)** que si  $\varphi_0$  est un minimum de  $\ell(\varphi)$ , alors :

$$\varphi_0' \frac{\varphi_0'}{\sqrt{1 + \varphi_0'^2}} - \sqrt{1 + \varphi_0'^2} = C$$

d'où l'on tire que

$$\varphi_0'^2 - 1 - \varphi_0'^2 = C \sqrt{1 + \varphi_0'^2} \Rightarrow \varphi_0'^2 = \text{Const.} \Rightarrow \varphi_0 = \text{const.}$$

et donc  $\varphi_0$  est de la forme  $\varphi_0(x) = \alpha x + \beta$ , comme on pouvait s'y attendre.

- (2) Pour trouver la fonction dont le graphe engendre par rotation autour de  $Ox$  la surface d'aire minimale, on doit minimiser la fonctionnelle:

$$A(\varphi) = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \quad .$$

Le coefficient  $2\pi$  ne joue pas de rôle; on prend donc :

$$f(y, z) = y \sqrt{1 + z^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{yz}{\sqrt{1 + z^2}}$$

d'où l'on tire, en appliquant **3.6(II)**, l'équation:

$$\varphi_0' \frac{\varphi_0 \varphi_0'}{\sqrt{1 + \varphi_0'^2}} - \varphi_0 \sqrt{1 + \varphi_0'^2} = C \quad .$$

Il en suit que

$$\frac{\varphi_0'}{\sqrt{(\varphi_0/C)^2 - 1}} = 1$$

Or

$$\left( \text{arccosh}(\varphi_0/C) \right)' = \frac{\varphi_0'}{\sqrt{\varphi_0^2 - C^2}} = 1/C$$

où  $\text{arccosh}(y)$  est la fonction inverse de  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , d'où l'on tire que

♠

$$\varphi_0(x) = C \cdot \cosh\left(\frac{x}{C} - \alpha\right)$$

où  $\alpha$  et  $C$  sont des constantes.

Il reste à savoir si pour  $P$  et  $Q$  donnés on peut déterminer les constantes  $\alpha$  et  $C$  telles que le graphe du  $\varphi_0$  correspondant passe par  $P$  et  $Q$ . Or la discussion de ce problème est assez compliquée, et nous nous contenterons de l'esquisser. On peut supposer que  $P = (0, 1)$  sans perte de généralité; Il se trouve que si  $Q$  est à gauche de la courbe en pointillé dans la figure **II.11**, il existe une solution qui passe par  $P$  et  $Q$ . Si  $Q$  se trouve à droite de la courbe en pointillé, il n'existe pas de solution qui passe par  $P$  et  $Q$ . Dans ce cas il y a une solution au problème, à condition de l'énoncer un peu différemment. Par rotation autour de l'axe  $Ox$ , les points  $P$  et  $Q$  décrivent deux cercles  $C_P$  et  $C_Q$ ; le problème est de trouver la surface d'aire minimale ayant les cercles  $C_P$  et  $C_Q$  comme bord. Lorsque  $Q$  est au-delà de la courbe en pointillé, on a comme solution tout simplement les disques dont  $C_P$  et  $C_Q$  sont les bords.

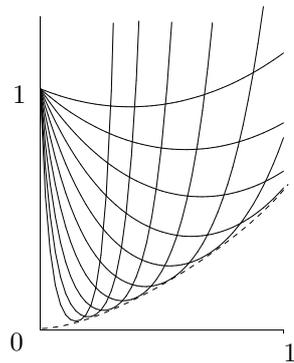
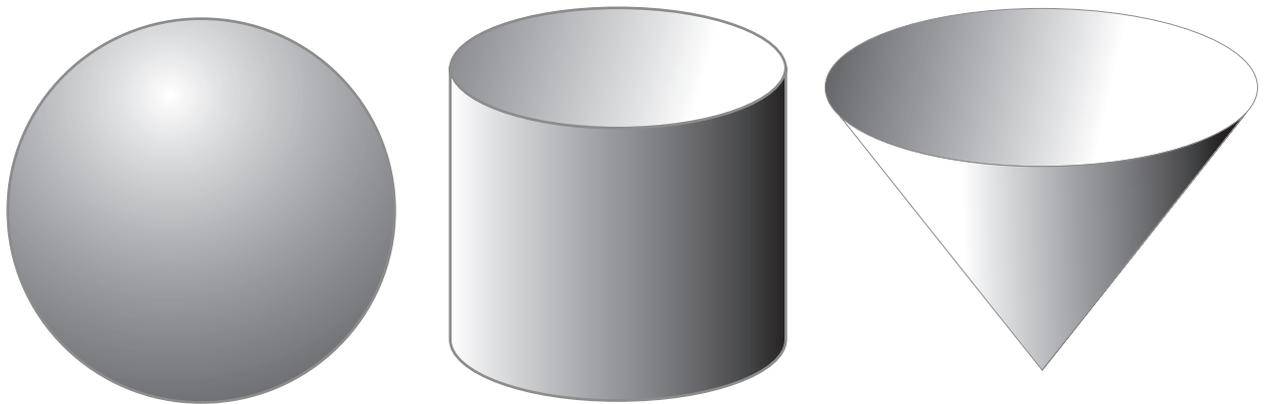
Figure II.11: Graphes engendrant des surfaces minimales par rotation autour de l'axe  $Ox$ 

Figure II.12: La sphère, le cylindre et le cône

On ne peut pas donner une formule explicite pour la courbe en pointillé, qui est en fait l'enveloppe de la sous-famille des courbes de la famille ♠ qui passent par  $P$ . (voir [3], page 301.)

Physiquement, on peut obtenir ces surfaces en réalisant  $C_P$  et  $C_Q$  en fil de fer et la surface cherchée par une pellicule d'eau savonneuse. On voit bien que si on part de deux cercles proches, bords d'une pellicule d'eau savonneuse d'un seul tenant, et qu'on éloigne de plus en plus les deux cercles, la pellicule finira par se séparer pour former (avec un peu de chance) deux disques, de bord  $C_P$ , respectivement  $C_Q$ .

### 3.1 Géodésiques sur les surfaces

Nous considérerons des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  données par une équation de la forme  $G(x, y, z) = 0$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est ouvert et  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ . Voici 3 exemples concrets de surface, où  $\Omega = \mathbb{R}^3$  :

- la sphère, d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
- le cylindre, d'équation  $x^2 + y^2 - 1 = 0$
- le cône, d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ .

Une courbe paramétrique régulière de l'espace est donnée par une application  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que nous supposons de classe  $\mathcal{C}^2$ , vérifiant  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$ . Nous noterons  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  et  $\gamma'(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$  sa dérivée. Nous noterons par  $G_x$ ,  $G_y$  et  $G_z$  les dérivées partielles respectives de  $G$ .

Etant donnée une surface  $Z(G)$  d'équation  $G(x, y, z) = 0$  et deux points  $P, Q \in Z(G)$ , on se pose le problème de trouver la courbe régulière  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  contenue dans la surface  $Z(G)$ , qui joint  $P$  à  $Q$ , et dont la longueur est minimale. Une telle courbe, qu'on appelle géodésique de la surface  $Z(G)$ , doit satisfaire :

- (1)  $G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \forall t \in [a, b]$   
 (2)  $\gamma(a) = P, \gamma(b) = Q$   
 (3) La fonctionnelle

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \quad ,$$

qui, d'après un raisonnement semblable à celui de l'exemple **3.1(1)** représente la longueur de  $\gamma$ , doit être minimale.

Supposons plus généralement que nous cherchions les extremales d'une fonctionnelle de la forme

$$(3-1) \quad \int_a^b f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt$$

où  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  représentent les coordonnées d'une courbe sur la surface  $Z(G)$  et de sa dérivée; une solution sera une courbe  $(x(t), y(t), z(t))$  qui rend la fonctionnelle ci-dessus extrémale, et qui de plus satisfait  $G(x(t), y(t), z(t)) = 0$ . Au voisinage d'un point régulier de  $Z(G)$ , quitte à échanger les rôles de  $x, y$  et  $z$ , on peut supposer que  $G_z \neq 0$ , et il suit alors du théorème des fonctions implicites que l'on peut paramétrer localement  $Z(G)$  par une application de la forme  $(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$ . On aura :

$$(3-2) \quad g_x = -\frac{G_x}{G_z} \quad , \quad g_y = -\frac{G_y}{G_z}$$

et si  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  est une courbe sur  $Z(G)$ , on aura que  $z(t) = g(x(t), y(t))$ , et donc  $\dot{z}(t) = g_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + g_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$ . Posons :

$$(3-3) \quad h(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = f(x, y, g(x, y), \dot{x}, \dot{y}, g_x(x, y) \cdot \dot{x} + g_y(x, y) \cdot \dot{y}) \quad .$$

Alors le problème revient à trouver les extremales de la fonctionnelle

$$(3-4) \quad \int_a^b h(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \quad .$$

Ce que nous avons gagné par rapport à (3-1) c'est que les variables  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  sont libres, alors que dans (3-1) on avait la contrainte supplémentaire  $G(x, y, z) = 0$ .

La fonctionnelle de (3-3) est plus générale que celle du type considéré pour obtenir les équations d'Euler-Lagrange. Mais le théorème suivant se démontre de manière analogue au théorème **3.6** :

**Théorème 3.8** *Si  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , est une extrémale de (3-4), alors elle satisfait les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{cases} h_x(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) - \frac{d}{dt}(h_{\dot{x}}(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))) = 0 \\ h_y(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) - \frac{d}{dt}(h_{\dot{y}}(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))) = 0 \end{cases}$$

■

Ces équations s'appellent encore équations d'Euler-Lagrange.

Dans notre cas, compte tenu de (3-3), elles donnent :

$$h_x - \frac{d}{dt} h_{\dot{x}} = f_x + f_z \cdot g_x + f_{\dot{z}} \cdot (g_{xx} \cdot \dot{x} + g_{xy} \cdot \dot{y}) - \frac{d}{dt}(f_{\dot{x}}) - \underbrace{\frac{d}{dt}(f_{\dot{z}} \cdot g_x)}_{= f_{\dot{z}} \cdot (g_{x,x} \cdot \dot{x} + g_{x,y} \cdot \dot{y}) + g_x \cdot \frac{d}{dt}(f_{\dot{z}})} = 0$$

d'où :

$$(3-5) \quad f_x - \frac{d}{dt}(f_{\dot{x}}) + g_x \cdot \left( f_z - \frac{d}{dt}(f_{\dot{z}}) \right) = 0$$

et, en échangeant  $x$  et  $y$  :

$$(3-6) \quad f_y - \frac{d}{dt}(f_{\dot{y}}) + g_y \cdot \left( f_z - \frac{d}{dt}(f_{\dot{z}}) \right) = 0$$

Définissons la fonction  $\lambda(t)$  par l'équation :

$$(3-7) \quad \frac{d}{dt}(f_{\dot{z}}) - f_z = \lambda \cdot G_z$$

on tire alors de (3-5) et (3-6), compte tenu de (3-2) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} - f_x &= g_x(f_z - \frac{d}{dt}(f_{\dot{z}})) = -\frac{G_x}{G_z}(f_z - \frac{d}{dt}(f_{\dot{z}})) = \lambda \cdot G_x \\ \frac{d}{dt}f_{\dot{y}} - f_y &= \lambda \cdot G_y \end{aligned}$$

donc finalement on obtient les 3 équations :

$$(3-8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} - f_x = \lambda \cdot G_x \\ \frac{d}{dt}f_{\dot{y}} - f_y = \lambda \cdot G_y \\ \frac{d}{dt}f_{\dot{z}} - f_z = \lambda \cdot G_z \end{cases}$$

qui seront valables en tous les points réguliers de  $Z(G)$ . Dans le cas particulier où  $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ , on obtient le système d'équations suivant, que devront satisfaire les géodésiques :

$$(3-9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \lambda \cdot G_x \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \lambda \cdot G_y \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \lambda \cdot G_z \end{cases} .$$

Pour le résoudre, il est plus commode de supposer que  $(x(t), y(t), z(t))$  est une paramétrisation par la longueur d'arc, que nous allons maintenant rappeler.

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière, posons

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme euclidienne;  $s(t)$  représente la longueur du morceau de courbe  $\gamma([a, t])$ , pour  $a \leq t \leq b$ , et prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, L]$ , où  $L = s(b)$  est la longueur de la courbe. Puisque  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$ ,  $s$  est monotone croissante, en fait une bijection entre  $[a, b]$  et  $[0, L]$ . On peut donc reparamétriser la courbe en posant  $\hat{\gamma}(s(t)) = \gamma(t)$ , ce qui définit une nouvelle paramétrisation  $\hat{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la même courbe; on dit que  $\hat{\gamma}$  est une paramétrisation par la longueur d'arc. On a :

$$\hat{\gamma}(s(t))' = \gamma'(s(t)) \cdot s'(t) = \gamma'(t) \Rightarrow \|\hat{\gamma}'(s(t))\| \cdot \underbrace{\|s'(t)\|}_{=\|\gamma'(t)\|} = \|\gamma'(t)\| \Rightarrow \|\hat{\gamma}'(s)\| = 1 .$$

On note maintenant par  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc; puisque  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$ , le système d'équations (3-9) devient :

$$(3-10) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \lambda \cdot G_x \\ \ddot{y} = \lambda \cdot G_y \\ \ddot{z} = \lambda \cdot G_z \end{cases}$$

ou encore, sous forme vectorielle :

$$(3-11) \quad \ddot{\gamma} = \lambda \cdot dG .$$

Autrement dit, l'accélération  $\ddot{\gamma}$  de la courbe géodésique, paramétrée par la longueur d'arc, doit être perpendiculaire au plan tangent à la surface (cf. **2.4(2)**).

**Exemples 3.9**

(1) Prenons le plan  $G(x, y, z) = z = 0$ . Alors  $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$  et l'équation (3-11) donne :

$$(\ddot{x}, \ddot{y}, 0) = \lambda(0, 0, 1) \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y} = 0$$

ce qui montre que les géodésiques sont des droites.

(2) Pour la sphère  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ , on a que  $dG = 2(x, y, z)$ , et de (3-10) on tire alors que  $\ddot{\gamma} = 2\lambda \cdot \gamma$ . Soit  $N(t) = \gamma(t) \times \dot{\gamma}(t)$ , où  $\times$  dénote le produit vectoriel, le vecteur perpendiculaire au plan engendré par  $\gamma(t)$  et  $\dot{\gamma}(t)$ . Alors :

$$\dot{N} = \underbrace{\dot{\gamma} \times \dot{\gamma}}_{=0} + \gamma \times \ddot{\gamma} = 2\lambda \gamma \times \gamma = 0$$

et il en suit que  $N$  est constant; donc la géodésique se trouve dans le plan perpendiculaire au vecteur constant  $N$  et c'est donc une portion de grand cercle de la sphère.

**4 Théorèmes de l'application inverse et du rang**

Ces deux théorèmes sont des conséquences du théorème des fonctions implicites. Le théorème de l'application inverse permet de construire des changements de coordonnées locaux; le théorème du rang permet d'écrire une application ayant une dérivée de rang maximum en un point comme une application linéaire, après changement de coordonnées local.

**Théorème 4.1 (Théorème de l'application inverse)** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert, de classe  $\mathcal{C}^1$ , et supposons qu'en un point  $x_0 \in U$  la dérivée  $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  soit inversible; posons  $y_0 = f(x_0)$ . Il existe un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \ni y_0$ ,  $r > 0$  et une application  $g : B(y_0, r) \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$f \circ g = \mathbb{I}_{B(y_0, r)} \quad , \quad g \circ f|_V = \mathbb{I}_V$$

où  $\mathbb{I}_\cdot$  dénote l'application identité. De plus,  $dg_{y_0} = df_{x_0}^{-1}$ .

On dira que  $g$  est un inverse local de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

*Preuve:* Posons

$$F(x, y) = y - f(x) \quad y \in \mathbb{R}^n, x \in U \quad .$$

Alors  $F(x_0, y_0) = 0$  et chercher l'inverse local de  $f$  revient à résoudre explicitement  $x$  par rapport à  $y$  dans l'équation  $F(x, y) = 0$ . Puisque  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = -df_{x_0}$  est inversible, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites 2.2, avec la remarque 2.3(1) (notez que les rôles de  $x$  et  $y$  sont inversés) :

$\exists r, R > 0$  et  $g : B(y_0, r) \rightarrow B(x_0, R)$  tels que pour  $(x, y) \in B(x_0, R) \times B(y_0, r)$  on a :  $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ .

et d'après 2.9  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ . Posons  $V = f^{-1}(B(y_0, r)) \cap B(x_0, R)$ . Montrons que  $f|_V$  et  $g$  sont inverse l'une de l'autre:

- si  $y \in B(y_0, r)$ ,  $g(y) = x \in B(x_0, R)$ , et donc  $F(x, y) = f(x) - y = 0 \Rightarrow y = f(x)$ ; cela entraîne aussi que  $g(y) \in V$ .
- si  $x \in V$ ,  $x \in B(x_0, R)$  et  $y = f(x) \in B(y_0, r)$ , donc  $g(y) = x$ .

Enfin, en dérivant les 2 membres de l'équation  $f(g(y)) = y$ , pour  $y \in B(y_0, r)$ , on obtient l'expression de  $dg_{y_0}$ .

*q.e.d.*

**Définition 4.2** Soit  $h : U \rightarrow V$ ,  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts. On dit que  $h$  est un difféomorphisme si  $h$  est  $\mathcal{C}^1$ , bijective, et d'inverse aussi  $\mathcal{C}^1$ . On dit que  $h$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $x_0 \in U$  s'il existe des ouverts  $U', V'$ ,  $x_0 \in U' \subset U$ ,  $h(x_0) \in V' \subset V$ , tel que  $h|_{U'}$  soit un difféomorphisme entre  $U'$  et  $V'$ .

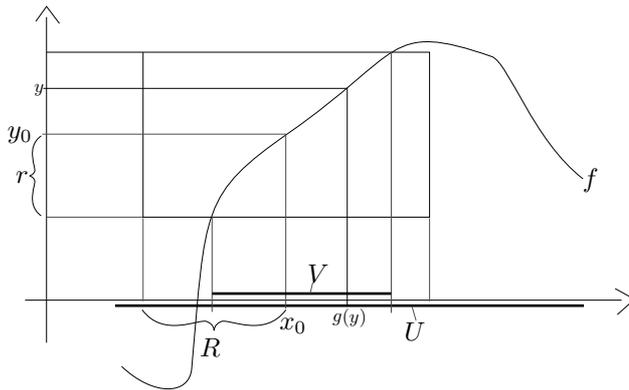


Figure II.13: Le théorème de l'application inverse

On peut donc résumer l'énoncé du théorème de l'application inverse en disant que si la dérivée de  $f$  en un point  $x_0$  est inversible, alors  $f$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$ .

### Exemple 4.3

- (1) Coordonnées polaires. Il s'agit de l'application  $f(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ ,  $\rho, \theta \in \mathbb{R}^2$ ,  $\rho \geq 0$ . On a :

$$f'(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \det(f'(\rho, \theta)) = \rho$$

donc  $f$  est un difféomorphisme local au voisinage de tout point  $(\rho, \theta)$  avec  $\rho > 0$ . Si on pose

$$U = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 0, -\pi < \theta < \pi\} \quad , \quad V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$$

alors  $f$  est un difféomorphisme entre  $U$  et  $V$ . Son inverse peut s'écrire ainsi :

$$f^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right)$$

où l'on prend arcsin comme étant l'inverse de  $\sin(\theta)$  restreint à l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ . Cette application a la vertu de transformer des cercles centrés à l'origine en des segments de droite, et les disques centrés à l'origine en des rectangles.

- (2) L'application  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 \cdot x_2)$  a pour dérivée

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(f'(x_1, x_2)) = x_1$$

c'est donc un difféomorphisme local au voisinage de tout point  $(x_1, x_2)$ , avec  $x_1 \neq 0$ . Si on pose

$$U = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < 1, i = 1, 2\} \text{ et } V = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < x_1\}$$

on vérifie que  $f$  est un difféomorphisme entre  $U$  et  $V$ . Cette application a donc la vertu de transformer le carré  $U$  en le triangle  $V$ .

**Théorème 4.4 (Théorème du rang)** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^1$  et  $x_0 \in U$ . Supposons que  $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  soit une application linéaire de rang maximum, c'est à dire de rang  $n$  si  $n \leq p$ , de rang  $p$  si  $n \geq p$ . Alors:

(1) Si  $n \leq p$ , il existe un ouvert  $U' \subset U$ ,  $U' \ni x_0$  et un difféomorphisme  $H : V' \rightarrow V$ ,  $V$  et  $V'$  ouverts de  $\mathbb{R}^p$ , tels que  $f(U') \subset V$  et

$$H^{-1}(f(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-n}) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in U' \quad .$$

(2) Si  $n \geq p$ , il existe un ouvert  $U' \ni x_0$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U' \subset U$ , et un difféomorphisme  $h : U' \rightarrow U''$ ,  $U''$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , tel que

$$f(h^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_p) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in U'' \quad .$$

*Preuve:* (1) Quitte à renuméroter les coordonnées au but, on peut supposer que  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1, \dots, n} \neq 0$ .  
Posons

$$H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_n) + \underbrace{(0, \dots, 0)}_n, x_{n+1}, \dots, x_p) \quad .$$

Alors

$$dH_{(x_0, 0)} = \left( \begin{array}{c|cccc} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1, \dots, p} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline \star & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

est inversible et  $H(x_0, 0) = f(x_0)$ , donc par 4.1  $H$  restreint à un ouvert  $V' \ni (x_0, 0)$  est un difféomorphisme sur un ouvert  $V \ni f(x_0)$ .

Or

$$H(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \implies \quad H^{-1}(f(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \quad .$$

(2) Si  $n \geq p$ , on peut supposer que  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1, \dots, p} \neq 0$ , quitte à renuméroter les coordonnées à la source. Si l'on pose

$$h(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n)$$

alors:

$$dh_{x_0} = \left( \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

est inversible, donc d'après 2.1  $h$  est un difféomorphisme d'un ouvert  $U' \ni x_0$  sur un ouvert  $U''$  de  $\mathbb{R}^n$ . Or

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &= h(h^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = (f_1(h^{-1}(x_1, \dots, x_n)), \dots, f_p(h^{-1}(x_1, \dots, x_n)), *, \dots, *) \\ \implies f(h^{-1}(x_1, \dots, x_n)) &= (x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

*q.e.d.*

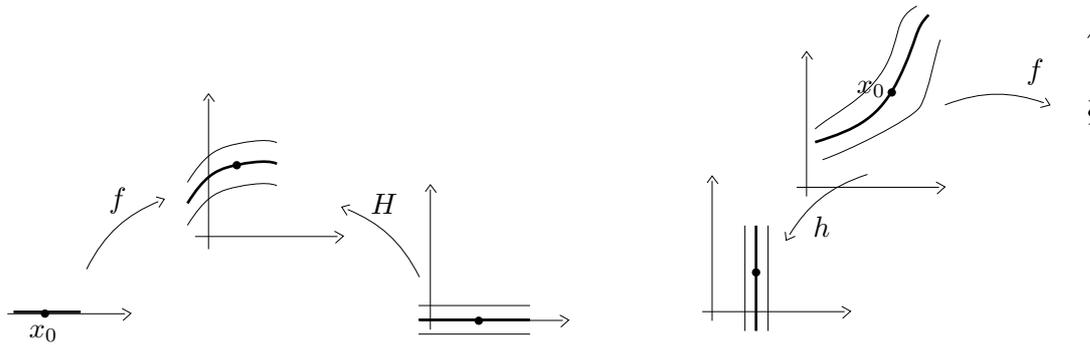


Figure II.14: Le théorème du rang lorsque  $n = 1, p = 2$  et  $n = 2, p = 1$

### 4.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

**Définition 4.5** On dit que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $k$  si  $\forall x_0 \in X, \exists U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et  $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  différentiable telle que:

- (1)  $X \cap U_{x_0} = f^{-1}(0) = \{x \in U_{x_0} \mid f_i(x) = 0, i = 1, \dots, n - k\}$
- (2)  $\forall x \in U_{x_0}$  la dérivée  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  est surjective.

On appelle  $n - k$  la codimension de  $X$ . L'application  $f$  est appelée équation locale de  $X$  au voisinage de  $x_0$

En d'autres termes, une sous-variété est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui admet en tout point un système d'équations qui satisfait les hypothèses du théorème 2.2 (théorème des fonctions implicites – voir remarque 2.3(2)).

On parle de courbes lisses ou de surfaces lisses dans le cas de sous-variétés de dimension 1, respectivement 2.

Plus généralement, on dira que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $k$  au voisinage d'un point  $x_0 \in X$  s'il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n, U \ni x_0$ , tel que  $U \cap X$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Remarques 4.6

- (1) Souvent une seule application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  suffit à décrire une sous-variété. C'est le cas pour tous les exemples ci-dessous, sauf le 3ème.
- (2)  $X$  est "localement fermée" dans  $\mathbb{R}^n$ :  $U_{x_0} \cap X$  est fermé dans  $U_{x_0}$  car  $f^{-1}(0)$  est un fermé.
- (3) Dans la condition (2) de la définition de sous-variété il suffirait de supposer que  $df_{x_0}$  est surjective, car alors  $df_x$  sera surjective pour  $x$  dans un ouvert  $U'_{x_0}$  de  $x_0$ , que l'on peut substituer à  $U_{x_0}$ .

#### Exemples 4.7

- (1) Le cercle  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$  est une sous-variété de dimension et codimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, on peut prendre un même ouvert valable pour tout  $x_0 \in S^1$ :  $U = U_{x_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Puisque  $df_{(x,y)} = (2x, 2y) \neq 0$  si  $(x, y) \in U$ , les conditions (1) et (2) de la définition de sous-variété sont satisfaites.

Plus généralement, la  $n - 1$ -sphère  $S^{n-1}$  est la sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$  et codimension 1, définie par:

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0 \right\}$$

et son équation  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$  est de rang maximum, car son gradient vaut  $2(x_1, \dots, x_n)$ , qui est non nul sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

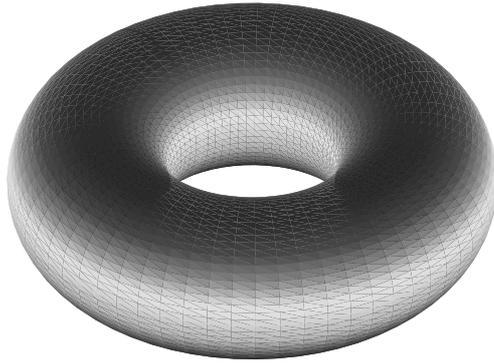


Figure II.15: Le tore

- (2) Le tore est la figure de l'espace obtenue en faisant tourner autour de l'axe  $Oz$  un cercle de rayon  $r$  placé dans le plan  $yz$ , centré en  $(0, R, 0)$ , avec  $r < R$ . Il a pour équation:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

et on vérifie que la dérivée de cette équation est non nulle sur les points du tore.

- (3) Soit  $M(3, 3, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$  l'ensemble des  $3 \times 3$  matrices à coefficients réels et  $\Sigma^1 \subset M(3, 3, \mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices de rang 1. Si  $A \in M(3, 3, \mathbb{R})$ , désignons par  $A_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)}$ , où  $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$  et  $1 \leq j_1 < j_2 \leq 3$ , le  $2 \times 2$  mineur correspondant à ces suites :

$$A_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} \end{pmatrix} = a_{i_1, j_1} a_{i_2, j_2} - a_{i_1, j_2} a_{i_2, j_1} \quad .$$

On a:

$$\Sigma^1 = \{A \in M(3, 3, \mathbb{R}) \mid A_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)} = 0, 1 \leq i_1 < i_2 \leq 3, 1 \leq j_1 < j_2 \leq 3\}$$

ce qui nous donne une description de  $\Sigma^1$  à l'aide de 9 équations. Si  $A^0 = (a_{i,j}^0)_{i,j=1,\dots,3} \in \Sigma^1$ , l'un de ses coefficients sera non nul; supposons que ce soit  $a_{1,1}$  et posons  $U_{A^0} = \{A \mid a_{1,1} \neq 0\}$ ; c'est un ouvert contenant  $A^0$  et

$$\Sigma^1 \cap U_{A^0} = \{A \mid A_{(1, i_2), (1, j_2)} = 0, i_2, j_2 = 2, 3\}$$

car l'annulation de ces 4 mineurs entraîne que la 2-ème et 3-ème colonne sont multiples de la première, et donc  $A$  est de rang 1.

La dérivée de  $A_{(1, i_2), (1, j_2)} = a_{1,1} a_{i_2, j_2} - a_{1, j_2} a_{i_2, 1}$  par rapport à  $a_{i_2, j_2}$  vaut  $a_{1,1} \neq 0$  et donc la dérivée de l'application  $(A_{(1, i_2), (1, j_2)})_{i_2, j_2=2,3} : U_{A^0} \rightarrow \mathbb{R}^4$  est de la forme :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & a_{1,1} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & a_{1,1} & \\ \hline & & & & \star \end{array} \right)$$

où les 4 premières colonnes correspondent aux dérivées par rapport aux variables  $a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,2}, a_{3,3}$ . Puisque  $a_{1,1}$  est non nul, on voit que cette dérivée est surjective. Les  $A_{(1, i_2), (1, j_2)}$ ,  $i_2, j_2 = 2, 3$  forment donc un système d'équation locales de  $\Sigma^1$  au voisinage de  $A^0$ . Donc  $\Sigma^1$  est une sous-variété de  $M(n, n, \mathbb{R})$  de codimension 4, de dimension 5. Au départ, on a décrit  $\Sigma^1$  avec 9 équations, mais on a vu que localement 4 équations suffisent; on peut montrer qu'il n'est pas possible de décrire  $\Sigma^1$  à l'aide de 4 équations globales (i.e. définies sur un ouvert de  $M(3, 3, \mathbb{R})$  contenant  $\Sigma^1$  avec dérivée surjective en tout point).

- (4) Le sous-ensemble
- $X$
- de
- $\mathbb{R}^2$
- constitué par la réunion des 2 axes de coordonnées admet comme équation:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\} \quad .$$

Le gradient de  $x \cdot y$  est  $(y, x)$ , et il s'annule en  $(0, 0)$ . Cela ne prouve pas encore que  $X$  n'est pas une sous-variété. Mais si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  ouvert contenant  $(0, 0)$ , s'annule sur  $U \cap X$ ,  $f|_{Ox \cap U} = f|_{Oy \cap U} = 0$  et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ . Il n'est donc pas possible de décrire  $X$  au voisinage de  $(0, 0)$  par une équation dont la dérivée est surjective (c'est-à-dire non nulle dans ce cas). Ce sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  n'est donc pas une sous-variété au voisinage de  $(0, 0)$ .

- (5) Considérons la courbe

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^3 = 0\}$$

appelée parabole semi-cubique.

La dérivée de  $y^2 - x^3$  est nulle en  $(0, 0)$ , mais (comme dans l'exemple (4) ci-dessus) cela ne suffit pas à montrer que  $X$  n'est pas une sous-variété, même si intuitivement on voit très bien que  $X$  ne ressemble pas à une sous-variété en  $(0, 0)$ . Il faut encore se convaincre que pour toute fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  s'annulant sur  $U \cap X$ ,  $U$  ouvert contenant  $(0, 0)$ , on a que  $df_0 = 0$ . Or  $X$  admet une paramétrisation (globale):

$$X = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

et donc  $f(t^2, t^3) = 0$  pour tout  $t$  assez petit. On en déduit en dérivant que  $\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) \cdot 3t^2 = 0$ , d'où en divisant par  $t$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) \cdot 3t = 0$ , et en évaluant en  $t = 0$  on trouve que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ . D'autre part,  $0 = f(t^2, t^3) - f(t^2, -t^3) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, -t^3 + \theta(t)2t^3) 2t^3$ , avec  $0 < \theta(t) < 1$ , d'où  $\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \theta(t) 2t^3) = 0$ , et en faisant tendre  $t$  vers 0 on en tire que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

- (6) Soient
- $R, r > 0$
- et considérons les équations
- $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$
- ,
- $f_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - r^2 = 0$
- , et posons
- $f = (f_1, f_2)$
- . Alors :

$$df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

et les  $2 \times 2$ -mineurs de  $df$  sont  $4xy$ ,  $4xz$  et  $4yz$ . Pour qu'ils soient tous les trois nuls, il faut que  $x = y = 0$ , ou bien  $x = z = 0$ , ou bien  $y = z = 0$ . Si de plus  $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 0$ , alors la seule possibilité est que  $y = z = 0$ , ce qui implique que  $x^2 = r^2$  et  $x^2 = R^2$ . Donc  $f$  définit une sous-variété, à condition que  $r \neq R$ ; c'est une courbe lisse, intersection des 2 cylindres  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ .

**Proposition 4.8** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$ . On a équivalence entre les conditions suivantes:

- (1)
- $\forall x_0 \in X, \exists$
- un ouvert
- $U_{x_0} \ni x_0$
- de
- $\mathbb{R}^n$
- et
- $f : U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
- , telle que
- $X \cap U_{x_0} = f^{-1}(0)$
- et
- $df_x$
- est surjective,
- $\forall x \in U_{x_0}$

(i.e.  $X$  est une sous-variété de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$  - on appelle  $f$  une équation locale régulière de  $X$ , ou des équations locales régulières si l'on se réfère aux composantes de  $f$ ).

- (2)
- $\forall x_0 \in X, \exists$
- un ouvert
- $V \subset \mathbb{R}^k$
- , un ouvert
- $U_{x_0} \ni x_0$
- et
- $h : V \rightarrow U_{x_0}$
- telle que

- $h : V \xrightarrow{\cong} U_{x_0} \cap X$  est une bijection.
- $dh_t : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est injective  $\forall t \in V$   
(on dira que  $h$  est une paramétrisation locale régulière de  $X$ ).

- (3)
- $\forall x_0 \in X, \exists$
- un ouvert
- $U_{x_0} \ni x_0$
- et un difféomorphisme
- $H : U_{x_0} \rightarrow \Omega$
- sur l'ouvert
- $\Omega$
- de
- $\mathbb{R}^n$
- tel que

$$H(X \cap U_{x_0}) = \Omega \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

( $H$  est un "aplatissement local" de  $X$ )

(voir figure II.16.)

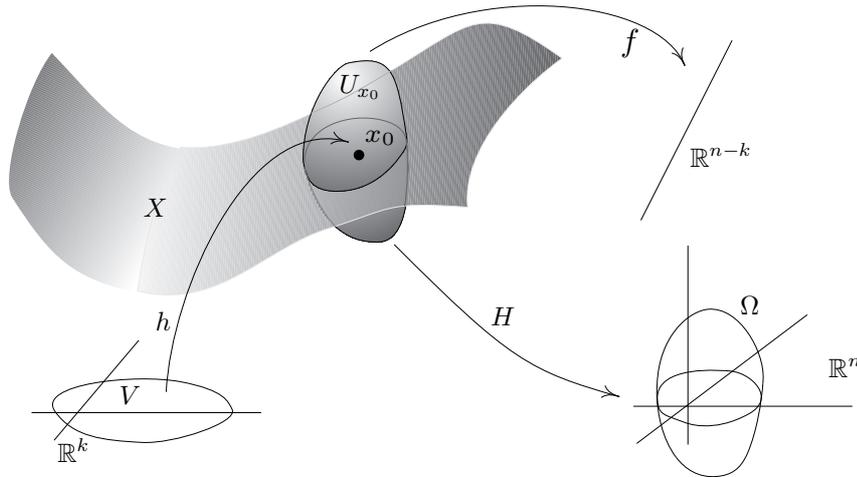


Figure II.16: Diverses façons de donner une description locale d'une sous-variété

En résumé, cette proposition nous donne 3 manières équivalentes de décrire localement une sous-variété  $X$  de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$  : par des équations locale régulières, par une paramétrisation locale régulière, ou par un difféomorphisme qui identifie le couple (ouvert de  $X$ ,  $\mathbb{R}^n$ ) avec le couple (ouvert de  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{R}^n$ ); régulier signifie que la dérivée est de rang maximum.

*Preuve:* (1) $\Rightarrow$ (2): par le théorème des fonctions implicites **2.2**.

(2) $\Rightarrow$ (3): par le théorème du rang **4.4**. Celui-ci nous fournit en effet un difféomorphisme local  $\widehat{H}$  tel que  $\widehat{H}^{-1} \circ h(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ ; il suffit de poser  $H = \widehat{H}^{-1}$ .

(3) $\Rightarrow$ (1): on pose  $f_i(x) = H_{k+i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n - k$ .

*q.e.d.*

## 5 Singularités d'applications, contours apparents, enveloppes

**Définition 5.1 (Points singuliers d'une application)** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^\infty$ . L'ensemble des points singuliers de  $f$  est défini par :

$$\Sigma(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid df_x \text{ est de rang } < n\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} = 0 \right\} ;$$

les points de  $f(\Sigma(f)) \subset \mathbb{R}^p$  sont appelés valeurs singulières de  $f$ .

Par exemple, considérons l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (x^2, y)$ . On a :

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \Sigma(f) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} , \quad f(\Sigma(f)) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} .$$

Cette application est appelée "le pli".

Considérons maintenant l'application  $f(x, y) = (x, y^3 - xy)$ . On a :

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 3y^2 - x \end{pmatrix} , \quad \Sigma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y^2 - x = 0\} , \quad f(\Sigma(f)) = \{(3y^2, -2y^3) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} .$$

Cette application est appelée "la fronce" (voir figure **II.17**). Ces deux applications jouent le rôle de prototype local pour toute application stable de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , comme nous le verrons plus loin.

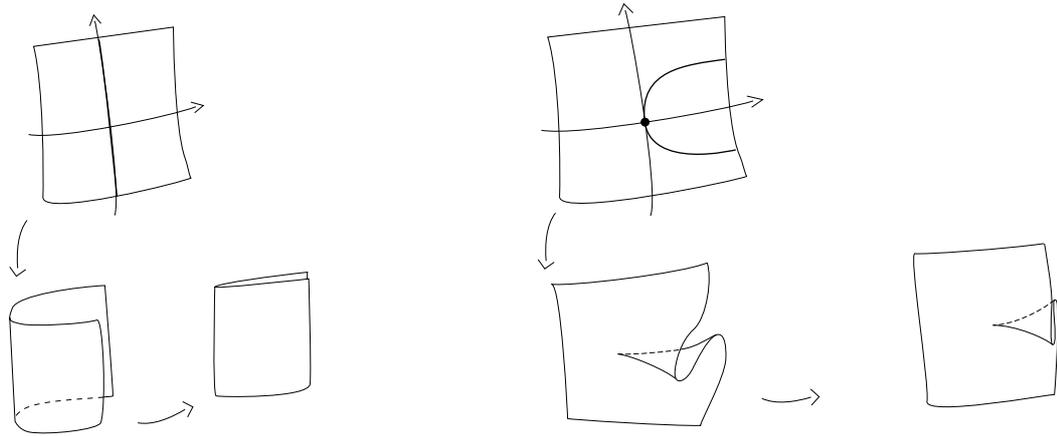


Figure II.17: Le pli et la fronce

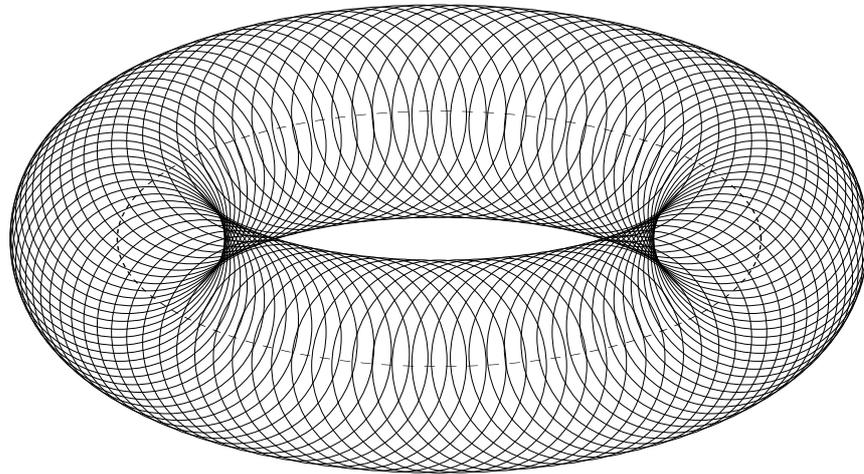


Figure II.18: Contour apparent de la projection sur le plan  $x+0.4z = 0$  du tore, représenté comme enveloppe de sphères de rayon  $r$  centrées sur un cercle de rayon  $R$ .

On voit sur ces 2 exemples comment le lieu singulier et son image aident à comprendre l'allure d'une application. En particulier, le nombre de points dans l'image inverse d'un point  $y \in \mathbb{R}^2$  est déterminé par la position de  $y$  par rapport à  $f(\Sigma(f))$ .

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface,  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  un 2-plan et  $p : S \rightarrow \pi$  la restriction à  $S$  de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\pi$ . On peut définir les points singuliers de  $p$  de manière analogue au cas d'une application  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert.

**Définition 5.2 (Points singuliers, contour apparent)** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface lisse,  $x_0 \in S$  et  $h : D \rightarrow S$  une paramétrisation locale régulière de  $S$  en  $x_0$ ,  $h(u_0) = x_0$ . On dit que  $x_0$  est un point singulier de la projection orthogonale  $p : S \rightarrow \pi$  sur le plan  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  si  $u_0$  est un point singulier de  $p \circ h$ , c'est-à-dire si le rang de la dérivée  $d(p \circ h)_{u_0}$  est plus petit ou égal à 1. On vérifie que cela ne dépend pas de la paramétrisation locale régulière choisie.

Puisque l'image de la dérivée de  $h$  en  $u_0$  est l'espace tangent à  $S$  au point  $x_0$ , dire que  $x_0$  est singulier c'est dire que  $TS_{x_0}$  est orthogonal à  $\pi$ .

On note par  $\Sigma(p)$  l'ensemble des points singuliers de  $p$  et on appelle  $p(\Sigma(p))$  le contour apparent de  $p$ .

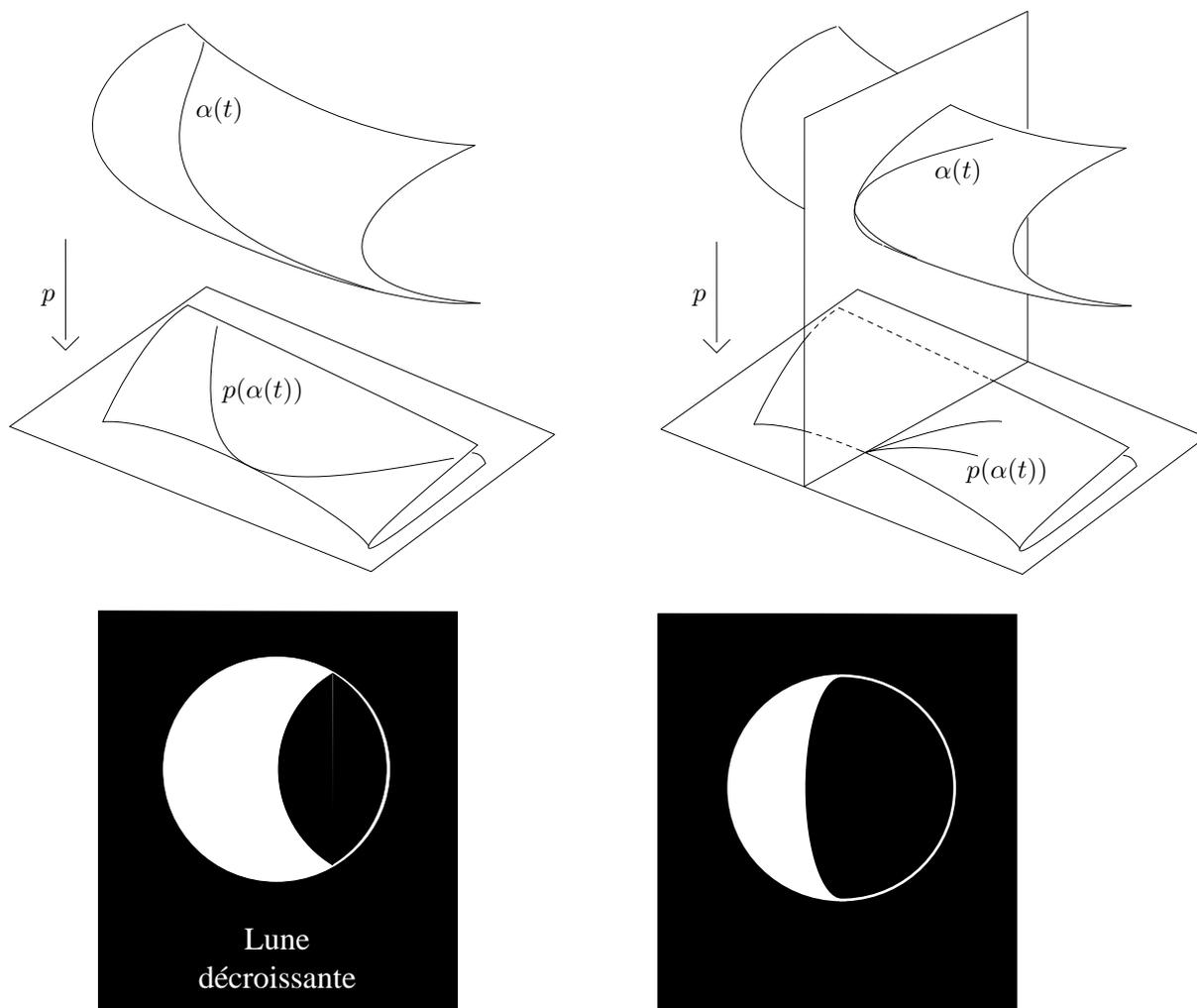


Figure II.19: Contour apparent et projection d'une courbe tracée sur une surface. Le dessin de la lune à gauche est erroné, celui de droite est correct.

Lorsqu'on dessine la projection d'une surface sur un plan  $\pi$ ,  $p(\Sigma(p))$  contient la frontière de l'image de la projection, d'où le nom "contour apparent".

Lorsque la surface  $S$  est donnée par une équation  $f(x, y, z) = 0$ , les points singuliers de la projection de  $S$  sur le plan  $OXY$  sont décrits par les équations :

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad .$$

Si on arrive à éliminer  $z$  de ce système d'équations, on a l'équation du contour apparent de la projection de  $S$  sur le plan  $OXY$ . Dans le cas de la figure II.18, le contour apparent est une courbe de degré 12, donc difficilement traitable.

La proposition suivante donne quelques informations utiles sur l'allure du contour apparent. D'après le théorème qu'on énoncera par la suite, les hypothèses en sont presque toujours satisfaites.

**Proposition 5.3** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface lisse,  $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une équation locale de  $S$ ,  $U \ni P$  et soit  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection  $p(x, y, z) = (x, y)$ . Supposons que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) \neq 0 \quad .$$

Alors  $(x_0, y_0)$  est un point régulier du contour apparent  $p(\Sigma(p) \cap U)$  de  $p$ . De plus, si  $\alpha : I \rightarrow S$  est une courbe tracée sur la surface  $S$ , avec  $\alpha(t_0) = P$ , la projection  $p(\alpha(t)) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  est tangente au contour apparent en  $(x_0, y_0)$  et  $p(\alpha(t))$  est située d'un même côté du contour apparent, pour  $t$  proche de  $t_0$  (voir figure II.19).

*Preuve:* Puisque  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) \neq 0$ , on peut résoudre explicitement par rapport à  $z$  au voisinage de  $P$  dans l'équation  $\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$  : soit  $z = g(x, y)$ ,  $g(x_0, y_0) = z_0$  la solution explicite. Alors, pour un ouvert  $U$  assez petit contenant  $P$ ,  $p(\Sigma(p) \cap U)$  a pour équation  $f(x, y, g(x, y)) = 0$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ ; cette équation est régulière au point  $(x_0, y_0)$  car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, g(x, y))}{\partial x}(P) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(P)}_{=0} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f(x, y, g(x, y))}{\partial y}(P) &= \frac{\partial f}{\partial y}(P) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(P)}_{=0} \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

et  $df_P = (\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), 0)$  est non nul, puisque  $P$  est régulier sur  $S$ . Aussi, puisque  $f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = 0$ , on a que :

$$\frac{\partial f(x, y, g(x, y))}{\partial x}(P) \cdot \alpha_1'(t) + \frac{\partial f(x, y, g(x, y))}{\partial y}(P) \cdot \alpha_2(t)' = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot \alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot \alpha_2'(t) = 0$$

ce qui montre bien que la projection  $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  de la courbe  $\alpha$  sur le plan  $(x, y)$  est tangente au contour apparent de  $S$  en  $(x_0, y_0)$ .

Posons  $\varphi(t) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), g(\alpha_1(t), \alpha_2(t)))$ ; il s'agit de montrer que  $\varphi(t)$  ne change pas de signe pour  $t$  proche de  $t_0$ . Remarquons que puisque  $\alpha$  est tracée sur  $S$ , on a que  $f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \equiv 0$ . En appliquant la formule de Taylor par rapport à la variable  $z$ , on a :

$$f(x, y, z') = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)(z' - z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)(z' - z)^2 + r_2$$

et en prenant  $(x, y, z') = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ ,  $z = g(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  et en posant  $P(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), g(\alpha_1(t), \alpha_2(t)))$ , on obtient :

$$\underbrace{f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))}_{=0} = \varphi(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(P(t))}_{=0}(\dots) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P(t)) \left( \alpha_3(t) - g(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \right)^2 + r_2$$

et il s'en suit que  $\varphi(t)$  a le même signe que  $-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P(t_0))$  pour  $t$  proche de  $t_0$

*q. e. d.*

Cette proposition montre que l'image de la lune décroissante de la figure II.19 est erronée. En effet, la limite de la zone d'ombre est la projection d'une courbe (pratiquement, un grand cercle) tracée sur la lune, donc elle devrait être tangente au contour apparent de la lune. Notons que si  $\alpha_1'(t_0) = \alpha_2'(t_0) = 0$ , le vecteur tangent à  $p(\alpha(t))$  en  $t_0$  est nul, donc évidemment tangent à  $p(\Sigma(p))$ . Néanmoins, visuellement on a l'impression que  $p(\alpha(t))$  s'approche du contour apparent par une direction qui ne lui est pas tangente, avant de rebrousser chemin (voir figure II.19).

Voici un théorème fondamental qui donne une information qualitative sur l'allure possible du contour apparent. C'est un cas particulier d'un résultat de Hassler Whitney[11], qui remonte à 1955, dont la preuve est assez élaborée.

**Théorème 5.4** *Pour presque tous les plans  $\pi \subset \mathbb{R}^3$ , le contour apparent de la projection orthogonale de la surface lisse  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une courbe ayant comme seules singularités possibles des points doubles ordinaires et des cusps ordinaires. De plus, ces singularités subsistent si la projection subit de petites perturbations. ■*

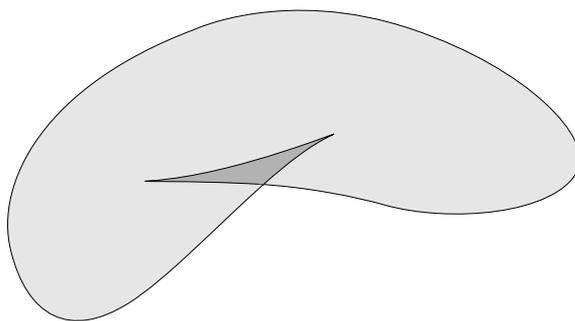


Figure II.20: Contour apparent de la projection d'une surface sur un plan

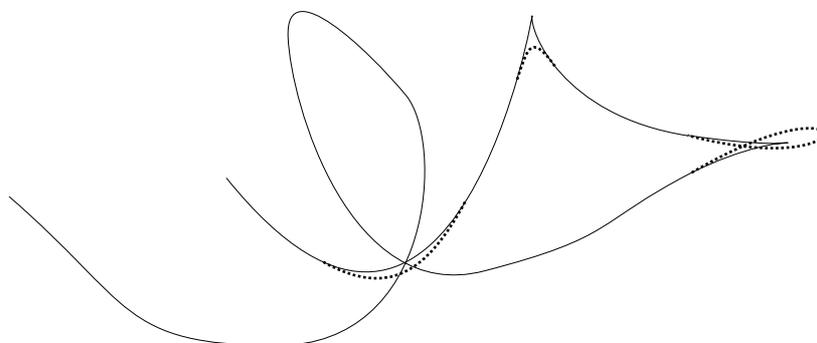


Figure II.21: Application stable d'une courbe dans le plan : après déformation, les singularités non stables cèdent la place à des singularités stables (en pontillé)

L'expression "pour presque tous les plans" signifie que l'affirmation du théorème est vraie quitte à remplacer le plan  $\pi$  par un plan  $\pi'$  proche de  $\pi$ . Le fait que les singularités subsistent malgré des petites perturbations de la projection s'exprime en disant qu'elles apparaissent de manière stable.

**Remarque 5.5** En fait Whitney a montré plus précisément que localement, dans des coordonnées locales convenables, la projection se met sous la forme  $(x, y) \mapsto (x^2, y)$  (le pli), ou bien  $(x, y) \mapsto (x, y^3 - xy)$  (la fronce).

On a un résultat analogue pour les projections orthogonales d'une courbe lisse  $X \subset \mathbb{R}^3$  sur un plan  $\pi$  : pour presque tous les plans, l'image de  $X$  sera une courbe plane ayant au pire des points doubles ordinaires comme singularités. On peut expérimenter cette affirmation en regardant un fil de fer dans l'espace, ce qui revient à le projeter sur notre plan de vision : si des points triples ou des points cuspidaux apparaissent, une petite perturbation du fil de fer les remplace par des points doubles ordinaires ou les fait disparaître (figure II.21).

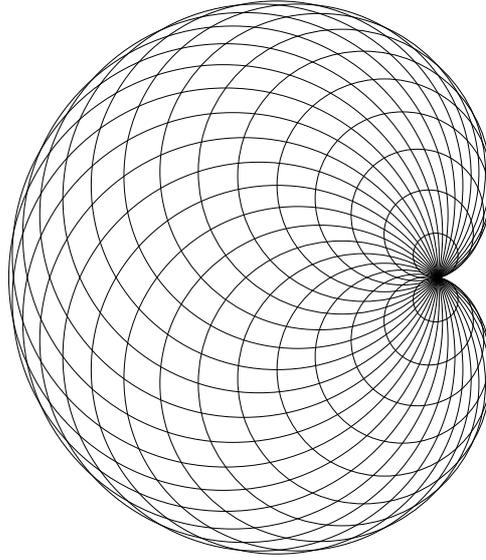


Figure II.22: Enveloppe de la famille de cercles centrés sur un cercle donné, passant par un point fixé du cercle donné

## 5.1 Enveloppes

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface lisse. On va la regarder comme famille de courbes planes : notons par  $(x, y, \lambda)$  un point de  $\mathbb{R}^3$ ; alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé, l'ensemble :

$$X_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, \lambda) \in S\}$$

est l'intersection du plan  $z = \lambda$  avec  $S$ , et il a toutes les chances d'être une courbe plane. On appelle enveloppe  $E$  de cette famille de courbes le contour apparent de la projection de  $S$  sur le plan  $(x, y)$ . Si  $S$  est décrite par une équation régulière  $F(x, y, \lambda) = 0$ , on a :

$$(x, y) \in E \iff \exists \lambda \text{ t.q. } F(x, y, \lambda) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \quad .$$

**Proposition 5.6** Soit  $F(x, y, \lambda) = 0$  une famille de courbes. Soit  $P_0 = (x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$  et supposons que :

$$F(P_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(P_0) = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial F}{\partial x}(P_0), \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \right) \neq (0, 0) \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}(P_0) \neq 0$$

alors  $(x_0, y_0)$  est un point régulier de  $X_{\lambda_0}$  et aussi de l'enveloppe  $E$  de la famille. Les tangentes de ces deux courbes au point  $(x_0, y_0)$  coïncident et les points de  $X_{\lambda_0}$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$  sont d'un même côté de  $E$ .

*Preuve:* Puisque  $\left( \frac{\partial F}{\partial x}(P_0), \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \right) \neq (0, 0)$ ,  $(x_0, y_0)$  est un point régulier de  $X_{\lambda_0}$ . Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 5.3

*q.e.d.*

L'affirmation de cette proposition peut se vérifier sur les figures II.22 et II.23.

La proposition 5.6 justifie la définition intuitive de l'enveloppe d'une famille de courbes, qui dit que l'enveloppe est "la courbe tangente à chaque courbe de la famille". Ainsi exprimée, cette notion peut se généraliser aux familles de surfaces; un exemple d'enveloppe d'une famille de surfaces est représenté sur la figure II.18.

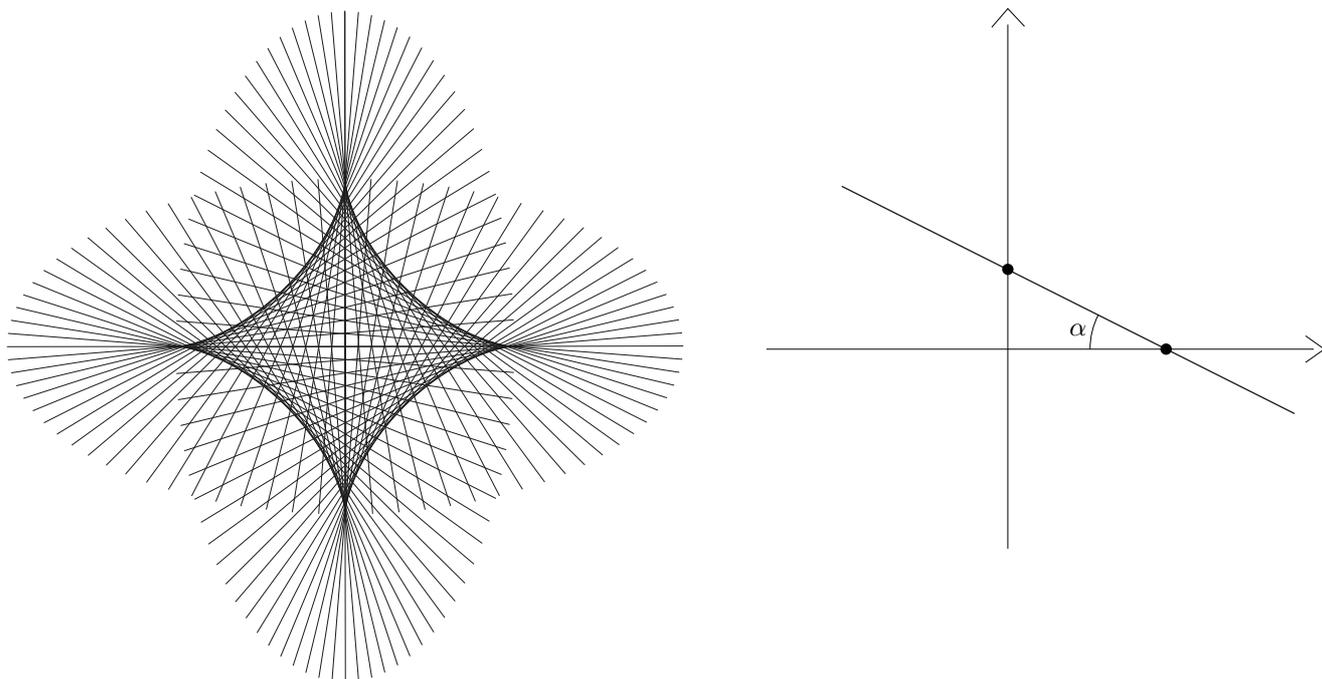


Figure II.23: Enveloppe de la famille des droites coupées par les axes  $OX$  et  $OY$  selon un segment de longueur 1

### Exemples 5.7

- (1) Soit  $f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0$  la famille des cercles de rayon 1 centrés en  $(\lambda, 0)$ . Le système d'équations :

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -2(x - \lambda) = 0 \end{cases}$$

a pour solutions  $x = \lambda$ ,  $y = \pm 1$ . On trouve donc les deux droites horizontales à hauteur  $\pm 1$ .

- (2) Considérons la famille des droites qui sont coupées par les axes  $OX$  et  $OY$  selon un intervalle de longueur 1; en prenant comme paramètre l'angle fait par la droite et le côté négatif de  $OX$  cette famille s'écrit :

$$f(x, y, \alpha) = \frac{x}{\cos(\alpha)} + \frac{y}{\sin(\alpha)} - 1 = 0$$

ou encore, en se débarassant des dénominateurs :

$$g(x, y, \alpha) = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0 \quad .$$

Du système d'équations :

$$\begin{cases} g(x, y, \alpha) = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) - \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 0 \end{cases}$$

on tire que  $x = \cos(\alpha)^3$ ,  $y = \sin(\alpha)^3$ , d'où l'équation de l'enveloppe :  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  (voir figures **II.23**, **II.24** et **II.25**)

Regardons maintenant le cas d'une famille de courbes paramétriques planes :

$$\Phi : I \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad I, \Lambda \subset \mathbb{R} \text{ des intervalles.}$$

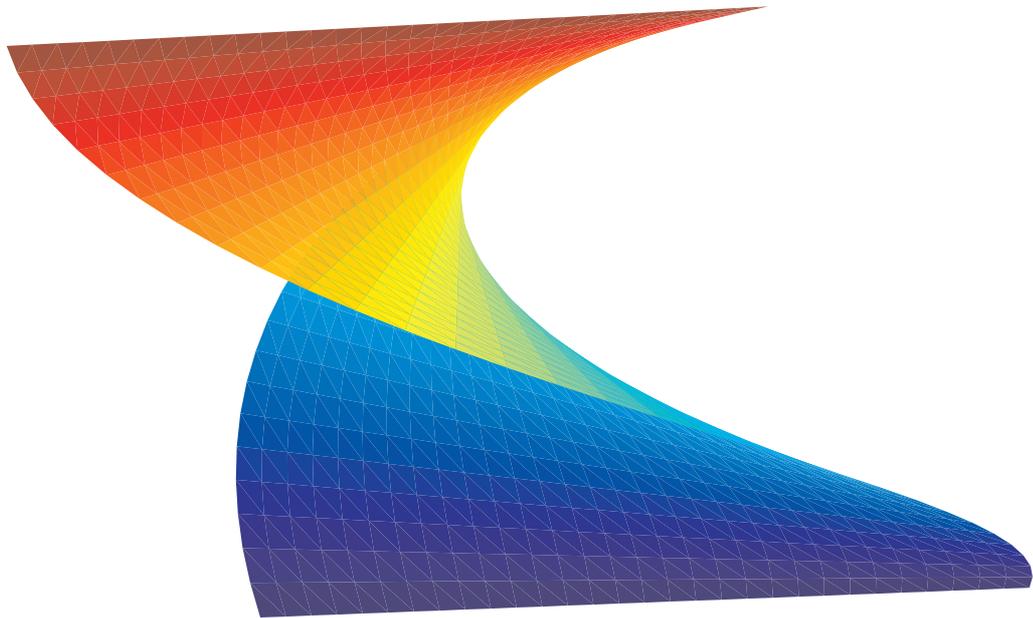


Figure II.24: La surface  $S$  associée à la famille de droites précédente, vue de côté

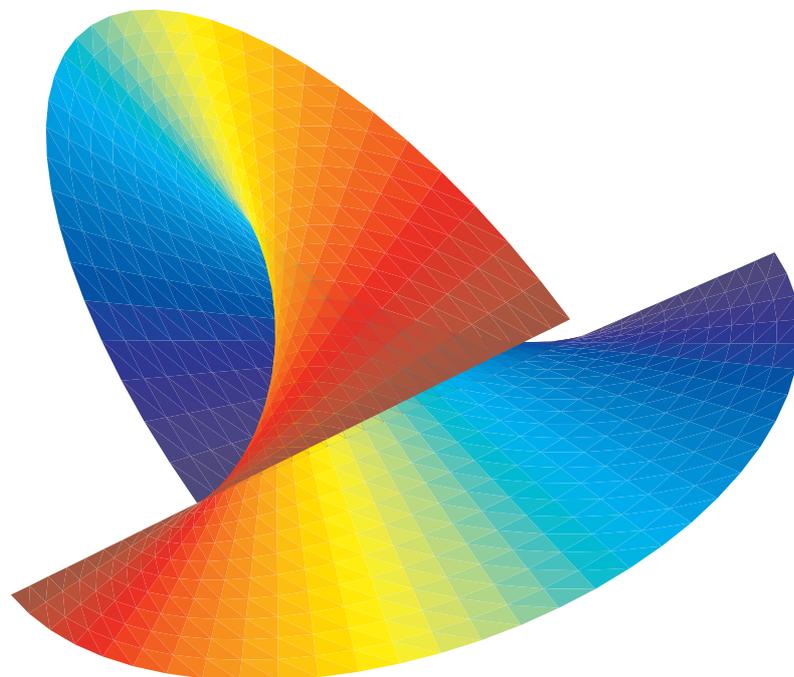


Figure II.25: La même surface d'avant vue d'en haut



Figure II.26: Une caustique dans la nature

Pour tout  $\lambda \in \Lambda$  fixé,  $t \mapsto \Phi_\lambda(t) = \Phi(t, \lambda)$  est une courbe paramétrique du plan. On se ramène au cas précédent en prenant pour  $S$  la surface paramétrique  $(t, \lambda) \mapsto (\Phi(t, \lambda), \lambda)$ . L'intersection de  $S$  avec le plan  $z = \lambda$  est bien la courbe  $\Phi_\lambda$ . Le contour apparent de la projection de  $S$  sur les 2 premières coordonnées coïncide avec le lieu singulier de  $\Phi$ , c'est-à-dire  $\Phi(\Sigma(\Phi))$ .

**Exemple 5.8** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrique régulière, que l'on suppose paramétrée par la longueur d'arc. On appelle droite normale à la courbe en un point  $\alpha(\lambda)$  la droite passant par  $\alpha(\lambda)$  perpendiculaire à la tangente à la courbe en  $\alpha(\lambda)$ ; elle aura pour représentation paramétrique :

$$t \mapsto \Phi(t, \lambda) = \alpha(\lambda) + t\nu(\lambda) = (\alpha_1(\lambda) - t\alpha'_2(\lambda), \alpha_2(\lambda) + t\alpha'_1(\lambda))$$

où  $\nu = (-\alpha'_2(\lambda), \alpha'_1(\lambda))$ . La matrice jacobienne de  $\Phi$  s'écrit :

$$d\Phi_{(t,\lambda)} = \begin{pmatrix} \alpha'_1(\lambda) + t(-\alpha''_2(\lambda)) & \alpha'_2(\lambda) + t\alpha''_1(\lambda) \\ -\alpha'_2(\lambda) & \alpha'_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\Sigma(\Phi) = \{(t, \lambda) \mid \det(d\Phi_{(t,\lambda)}) = t(-\alpha'_1\alpha''_2 + \alpha''_1\alpha'_2) + \alpha'_1(\lambda)^2 + \alpha'_2(\lambda)^2 = 0\}$$

d'où l'on tire que  $(t, \lambda) \in \Sigma(\Phi)$  équivaut à  $t = \frac{1}{\langle \nu(\lambda), \alpha''(\lambda) \rangle}$ , et donc  $\phi(t, \lambda)$  est le centre du cercle osculateur à  $\alpha$  au point  $\alpha(\lambda)$ . L'enveloppe de droites normales est donc le lieu des centres des cercles osculateurs.

On déduit du théorème de Whitney qu'en général les enveloppes de familles de courbes ont pour singularités uniquement des cusps ordinaires et des points doubles ordinaires, qui subsistent après une petite déformation. Cette stabilité explique pourquoi on peut observer dans la nature des courbes présentant des cusps, comme par exemple la caustique constituée par l'enveloppe des rayons de soleil réfléchis dans une tasse de café, alors qu'en général une ficelle posée sur un plan présentera au pire des points doubles à tangentes distinctes. Cela explique aussi pourquoi, en général, le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe présente des points cuspidaux, qui sont en fait les centres de cercles hyperosculateurs (voir figure II.27).

## 6 Exercices

### A Dérivées

On désigne par  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  l'espace des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

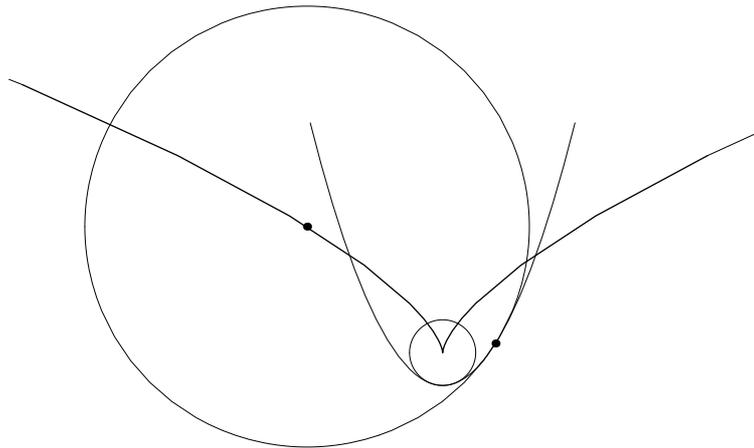


Figure II.27: Lieu des centres des cercles osculateurs à une parabole

1 Soient  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  et  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Montrer que

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

où  $B \circ A$  dénote la composition.

2 Soit  $\phi(t) = (t^2, t^3)$ . Montrer qu'il n'existe pas de  $\xi \in [0, 1]$  tel que  $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi)$ .

3 Calculer la dérivée de l'application

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \quad , \quad (A, B) \mapsto B \circ A$$

sans utiliser l'expression de  $A$  et  $B$  en termes de matrices. En déduire la dérivée des applications :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad , \quad A \mapsto A \circ A \quad \text{et} \quad A \mapsto A \circ A \circ A \quad .$$

4 Calculer la dérivée de  $f$  et dessiner les ensembles  $\Sigma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{rang}(df_x) \leq 1\}$  et  $f(\Sigma(f))$  dans le cas suivants :

a)  $f(x, y) = (x^2, y^2)$

b)  $f(x, y) = (x^2 + y^3, x^3 + y^2)$

c)  $f(x, y) = (x, y^3 - xy)$

d)  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

5 Soit  $M(n)$  l'espace des  $n \times n$ -matrices à coefficients réels. Si  $A \in M(n)$ , on note par  $A^t$  sa transposée. L'espace des  $n \times n$ -matrices symétriques à coefficients réels sera désigné par  $Sym(n)$  :

$$Sym(n) = \{A \in M(n) \mid A = A^t\} \quad .$$

Considérons l'application :

$$\varphi : M(n) \rightarrow Sym(n) \quad , \quad A \mapsto A \cdot A^t$$

et désignons par  $\mathbb{I}_n \in M(n)$  la matrice de l'identité. Calculez la dérivée de  $\varphi$ .

Montrez que si  $\varphi(A) = \mathbb{I}_n$  (i.e.  $A$  est orthogonale), alors  $d\varphi_A$  est surjective.

## B Théorème des fonctions implicites

**6** Trouver en quels points on ne peut pas résoudre explicitement les équations suivantes, et esquisser les lieux décrits par ces équations (ici les variables jouent des rôles équivalents) :

$$y^2 + (x^2 - 1)x^2 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ (x - 1/2)^2 + y^2 - 1/4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad y^2 - x^2(x - 1) = 0$$

**7** Trouver pour quelles valeurs de  $a$  et  $r$  les zéros de l'application suivantes sont tous réguliers :

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + (y - b)^2 + z^2 - r^2)$$

**8** Esquisser la courbe d'équation  $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy = 0$  (folium de Descartes) en étudiant les intersections avec les droites d'équation  $x + y = c$ , et en faisant varier  $c$ .

**9** On dit que le point  $(x_0, y_0)$  de la courbe d'équation  $y - g(x) = 0$ , où  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , est un point d'inflexion si  $g''(x_0) = 0$ .

Plus généralement, soit  $(x_0, y_0)$  un point régulier de la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$ , où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ; soit  $g : ]x_0 - r_0, x_0 + r_0[ \rightarrow ]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$  telle que  $f(x, g(x)) = 0$ , au cas où  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  (sinon il faut échanger les rôles de  $x$  et  $y$ ). On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point d'inflexion de  $Z(f)$  si  $g''(x_0) = 0$ .

Montrer que les points d'inflexion de  $Z(f)$  sont ceux qui satisfont l'équation :

$$f_{y,y} \cdot f_x^2 - 2f_{x,y} \cdot f_x \cdot f_y + f_{x,x} \cdot f_y^2 = 0$$

où  $h_x$  (resp.  $h_y$ ) dénote la dérivée par rapport à  $x$  (resp. par rapport à  $y$ ) de la fonction  $h(x, y)$ . (Indication : on sait que  $g'(x) = -f_x/f_y$ ; calculer à partir de là  $g''(x)$  en fonction des dérivées de  $f$ ).

Trouver les points d'inflexion des courbes suivantes :

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0 \quad ; \quad x^3 + y^3 - 1 = 0$$

Esquisser ces deux courbes.

## C Multiplicateurs de Lagrange

**10** Trouver la distance minimale de la courbe plane  $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$  à l'origine.

Cette courbe est-elle compacte ?

**11** Montrer que la courbe de l'espace d'équations  $x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$  et  $y + 1/2z - 1 = 0$  est compacte. Trouver les distances minimales et maximales de ses points à l'origine.

**12** Trouver la distance minimale des points de la surface  $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$  à l'origine. Que peut-on dire de la distance maximale à l'origine ?

**13** Esquisser la courbe  $y^2 - x(x - 1)(x - 2) = 0$ . Trouver sa distance minimale au point  $(a, 0)$ .

**14** Trouver les valeurs maximales et minimales de la fonction  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2$  sur l'ellipsoïde  $(x/4)^2 + (y/5)^2 + (z/25)^2 - 1 = 0$ . Interpréter géométriquement.

## D Calcul des variations

15 Trouver les extrémales de :

(1)

$$\int_0^1 (\varphi'(x)^2 + 12x\varphi(x)) dx \quad , \text{ avec } \varphi(0) = 2, \varphi(1) = 3$$

(2)

$$\int_1^2 \varphi'(x)(1 + x^2\varphi'(x)) dx \quad , \text{ avec } \varphi(1) = 3, \varphi(2) = 2$$

16 Trouver  $\varphi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) > 0$  pour  $x \in [a, b]$ ,  $\varphi_0(a) = A$ ,  $\varphi_0(b) = B$ , qui minimise la fonctionnelle :

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}}{\varphi(x)} dx$$

(Cette intégrale représente la longueur de la courbe  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  dans le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  muni de la métrique hyperbolique.)

## E Géodésiques

17 Décrire les géodésiques du cylindre de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

## F Sous-variétés

18 Soit  $M(n, n, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices  $n \times n$  à coefficients réels et  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  les sous-espace des matrices symétriques. Définissons  $\varphi : M(n, n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  par  $\varphi(A) = A \cdot A^t - I$ , où  $A^t$  dénote la transposée et  $I$  la matrice identité. Montrer que si  $\varphi(A) = 0$ , alors la dérivée  $d\varphi_A : M(n, n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  est surjective. En déduire que le groupe orthogonal  $O(n)$  est une sous-variété de  $M(n, n, \mathbb{R})$ . Calculer sa dimension (utiliser l'exercice 5).

## G Enveloppes

19 Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses :

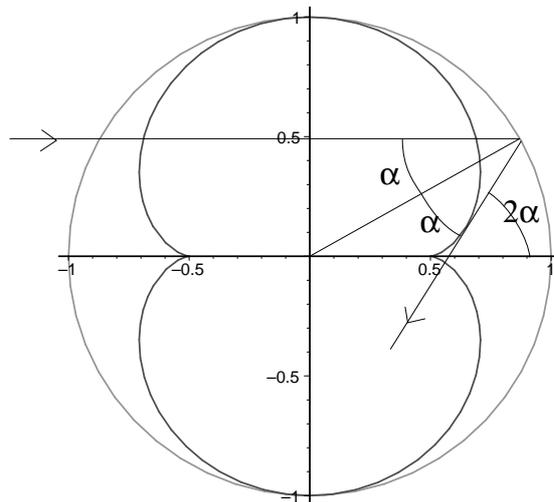
$$x^2 + y^2\lambda^2 - \lambda = 0$$

20 Une source lumineuse se trouve à  $-\infty$  sur l'axe  $OX$ , dans le plan  $OXY$ . Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis par le demi-cercle  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0\}$ .

Indications : pour simplifier les calculs, identifier le plan aux nombres complexes. Montrer que la famille des rayons réfléchis est paramétrée par :

$$\varphi(\alpha, s) = e^{i\alpha} + se^{2i\alpha}$$

en faisant correspondre à  $\alpha$  le rayon par  $e^{i\alpha}$ . Montrer ensuite que si  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , le déterminant de son jacobien s'écrit  $c \cdot (f_x \cdot \overline{f_y} - f_y \cdot \overline{f_x})$ , où  $c$  est une constante universelle et  $\overline{f_x}$  est le conjugué de la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$ , etc. Cela permet de calculer facilement le déterminant du jacobien de  $\varphi(\alpha, s)$ , et de là on déduit une paramétrisation de l'enveloppe, qui est en faite la néphroïde de la figure ci-après.



# Chapitre III

## Equations différentielles ordinaires

*Sommaire.* Nous étudions les équations différentielles ordinaires sous forme normale, c'est-à-dire les équations de la forme

$$y' = f(t, y)$$

où  $y = y(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, est l'application cherchée, et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert, est donnée.

Au § 2 nous établissons des théorèmes d'existence et unicité pour de telles équations, qui consacrent leur caractère déterministe : les conditions initiales déterminent entièrement une solution (maximale); par contraste, on montre au § 1 un exemple très simple d'équation qui n'est pas sous forme normale, et qui possède une infinité de solutions ayant une condition initiale donnée.

Au § 3 nous étudions les équations linéaires. Dans le cas des équations à coefficients constants, une généralisation de la fonction exponentielle  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  permet de trouver une expression explicite des solutions.

Au § 4, nous verrons que, dans certains cas, le comportement local des solutions d'une équation de la forme  $y' = f(y)$  au voisinage d'un point  $y_0$  où  $f(y_0) = 0$  est déterminé par la dérivée de  $f$  en  $y_0$ .

### 1 Introduction, exemples

Une équation différentielle ordinaire d'ordre  $k$  est une expression de la forme:

$$(1-1) \quad f(t, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \text{ où } f : U \rightarrow \mathbb{R}^p, U \text{ ouvert de } \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{k+1} \quad ;$$

une solution est une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , vérifiant :

- $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k)}(t)) \in U, \forall t \in I$
- $f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k)}(t)) = 0, \forall t \in I$ .

On parle d'équations différentielles *ordinaires* parce qu'elles ne font intervenir que les dérivées par rapport à une seule variable, généralement notée  $t$ , par opposition aux équations qui font intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables, comme l'équation de Laplace :  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ , qui se traitent par des méthodes différentes.

On dit qu'une équation est sous forme normale si elle s'écrit:

$$y' = f(t, y) \quad , \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad , \quad y' = (y'_1, \dots, y'_n).$$

C'est ce type d'équation que l'on va traiter par la suite. Montrons comment on peut essayer d'y ramener des équations de type général (1-1). Tout d'abord, on peut se ramener à l'ordre 1 en augmentant le nombre de variables; on pose:

$$x_0 = y, \quad x_1 = y', \quad \dots, \quad x_{k-1} = y^{(k-1)}$$

et alors (1-1) est équivalente au système d'équations d'ordre 1:

$$\begin{aligned}x_1 - (x_0)' &= 0 \\x_2 - (x_1)' &= 0 \\&\vdots \\x_{k-1} - (x_{k-2})' &= 0 \\f(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, (x_{k-1})') &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$F(t, x, x') = (x_1 - x'_0, \dots, x_{k-1} - x'_{k-2}, f(t, x_0, \dots, x_{k-1}, x'_{k-1}))$$

on est ramené à étudier l'équation d'ordre un  $F(t, x, x') = 0$ , que l'on peut essayer de mettre sous forme normale, par exemple en utilisant le théorème des fonctions implicites.

**Définition 1.1** Soit  $y' = f(t, y)$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  une équation sous forme normale et soit  $(t_0, y_0) \in U$ . Une solution de l'équation  $y' = f(t, y)$  avec condition initiale  $(t_0, y_0)$  est une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , telle que

- $I \ni t_0$  et  $(t, \varphi(t)) \in U \quad \forall t \in I$
- $\varphi(t_0) = y_0$  et  $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ .

On dit que  $\varphi$  est une solution maximale (ou non prolongeable) si on ne peut pas l'étendre; c'est à dire que si  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  est aussi une solution, avec  $J \supset I$  et  $\psi|I = \varphi$ , alors  $\psi = \varphi$  (et en particulier  $J = I$ )

L'exemple basique d'équation différentielle:  $y' = f(t)$ , où  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, admet comme unique solution avec conditions initiales  $(t_0, y_0) \in ]a, b[ \times \mathbb{R}$  la fonction  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

(ici on peut poser  $U = ]a, b[ \times \mathbb{R}$  puisque  $f$  ne dépend que de  $t$ ). Cela nous pousse à croire qu'en général une équation différentielle admet une unique solution maximale ayant une condition initiale donnée; c'est précisément ce qu'affirme le théorème **2.12**, dans le cas où  $f$  vérifie certaines conditions.

### Equations à variables séparées

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

où  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues. Si  $g(y_0) = 0$ , alors la fonction constante  $\varphi(t) = y_0$  est solution. Sinon, par continuité  $g(y) \neq 0$  pour  $y$  proche de  $y_0$  et alors on peut mettre l'équation sous la forme :

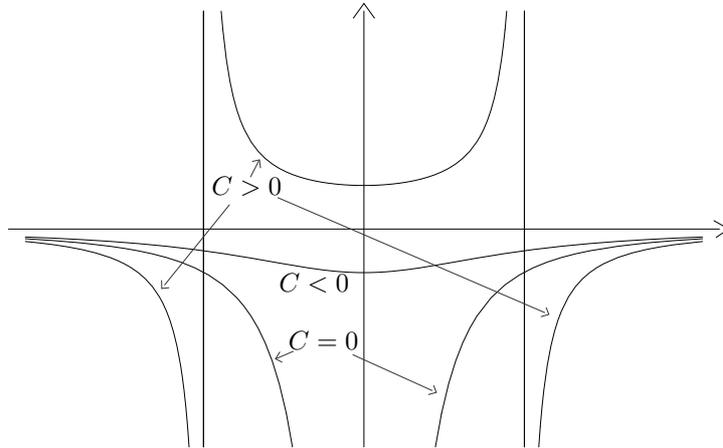
$$(1-2) \quad \frac{y'}{g(y)} = f(t)$$

d'où le nom de "variable séparées" ( $y$  d'un côté,  $t$  de l'autre). Si  $\varphi(t)$  est une solution, avec condition initiale  $\varphi(t_0) = y_0$ , en remplaçant dans (1-2) et en intégrant de  $t_0$  à  $t$ , il vient :

$$\int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{g(\varphi(s))} ds = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

où la première égalité utilise la substitution  $\eta = \varphi(t)$ . Si on pose

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} \quad , \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds \quad , \quad \Phi(y, t) = G(y) - F(t)$$

Figure III.1: Allure des solutions de  $y' = 2ty^2$ 

on a que  $\varphi(t)$  est solution de notre équation si et seulement si  $\Phi(\varphi(t), t) = 0$ . Notons que  $\Phi(t_0, y_0) = 0$  et que  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ . Il suit alors du théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction  $\varphi(t)$ , définie pour  $t$  proche de  $t_0$ , avec  $\varphi(t_0) = y_0$ , et qui vérifie  $\Phi(\varphi(t), t) = 0$ , c'est-à-dire que  $\varphi(t)$  est bien solution de notre équation différentielle.

### Exemples 1.2

(1) Considérons l'équation

$$y' = 2ty^2 \quad .$$

On en tire que si  $y(t)$  est une solution,  $y(t) \neq 0$ ,  $\frac{y'}{y^2} = 2t$  et de là, en intégrant des deux côtés de l'équation, que  $-1/y(t) + C = t^2$  où  $C$  est une constante, et donc :

$$(1-3) \quad y_C(t) = \frac{1}{C - t^2}$$

et si l'on veut que  $y(t_0) = y_0$ , alors  $C = 1/y_0 + t_0^2$ ; c'est à dire, en remplaçant dans (1-3) :

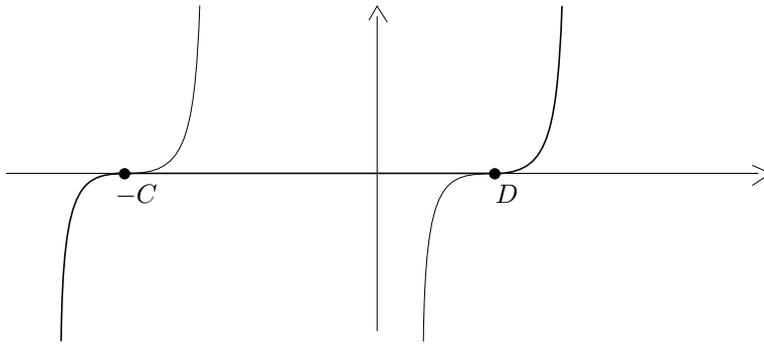
$$(1-4) \quad y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(t_0^2 - t^2)} \quad .$$

Esquissons l'allure de ces solutions. La forme (1-2) est plus maniable, sauf que la solution  $y \equiv 0$  n'y apparaît pas. En tous les cas,  $y_C(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \pm\infty$  (i.e. l'axe  $Ox$  est une asymptote horizontale) et  $y_C(t) = y_C(-t)$ .

Si  $C < 0$ ,  $y_C(t)$  est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et  $y_C(0) = 1/C < 0$ .

Si  $C = 0$ ,  $y_C(t)$  est définie pour  $t < 0$  et pour  $t > 0$ . L'axe  $Oy$  est une asymptote verticale, et  $y_C(t) \rightarrow -\infty$  si  $t \rightarrow 0$

Si  $C > 0$ ,  $t = \sqrt{C}$  et  $t = -\sqrt{C}$  sont des asymptotes verticales.  $y_C(t)$  est définie pour  $t < -\sqrt{C}$ ,  $-\sqrt{C} < t < \sqrt{C}$  et  $t > \sqrt{C}$ . On utilise la notation  $t \rightarrow a-0$  ou  $t \rightarrow a+0$  pour indiquer que  $t$  tend vers  $a$  par des valeurs inférieures à  $a$ , respectivement supérieures : si  $t \rightarrow -\sqrt{C}-0$  ou  $t \rightarrow \sqrt{C}+0$ , alors  $y_C(t) \rightarrow -\infty$ , et si  $t \rightarrow -\sqrt{C}+0$  ou  $t \rightarrow \sqrt{C}-0$ , alors  $y_C(t) \rightarrow +\infty$  (voir figure III.1). On constate sur cet exemple que pour toute condition initiale  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  il existe une unique solution maximale ayant cette condition initiale. On doit retenir aussi que, selon les conditions initiales, les intervalles de définition des solutions maximales peuvent être bornés, bornés à gauche ou à droite seulement, ou non bornés.

Figure III.2: Solutions de  $y' = 3y^{2/3}$ 

(2) Considérons maintenant l'équation

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \quad .$$

On a comme solution  $y \equiv 0$ . En supposant  $y(t) \neq 0$ , on a  $y'/(3\sqrt[3]{y^2}) = 1$ , d'où l'on tire que  $y^{1/3} = t + C$ , ou encore que  $y = (t + C)^3$ . On voit que pour la condition initiale  $(t_0, 0)$  on a deux solutions possibles :  $y \equiv 0$  ou  $y = (t - t_0)^3$ . En fait, il y a pire; on peut "recoller" des solutions du type  $y = (t + C)^3$ ,  $t \leq -C$  avec la solution zéro: on vérifie que pour  $D > -C$  la fonction

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t + C)^3 & \text{si } t \leq -C \\ 0 & \text{si } -C \leq t \leq D \\ (t - D)^3 & \text{si } t \geq D \end{cases}$$

est une solution. Donc il y a une infinité de solutions maximales ayant une condition initiale donnée (voir figure III.2). Si on se réfère au théorème 2.12, le fait qu'il n'y ait pas unicité des solutions ayant une condition initiale donnée tient à ce que le deuxième membre de l'équation  $\sqrt[3]{y^2}$  n'est pas dérivable en  $y = 0$ . Mais cette équation est équivalente à l'équation  $(y')^3 - 27y^2 = 0$ , dont le seul défaut est de ne pas être sous forme normale.

Dans le même ordre d'idées, une équation relativement simple (qui n'est pas sous forme normale), dont les solutions approchent n'importe quelle fonction  $\mathcal{C}^\infty$  a été trouvée par Lee-A. Rubel [8]

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons encore examiner comment les équations de la forme  $y' = f(y)$  se comportent lorsqu'on les transporte par une application. Cela nous permettra ensuite d'étudier l'allure des trajectoires de champs de vecteurs linéaires dans le plan.

## 1.1 Transport de champs de vecteurs

Un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est une application continue  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Il lui est associé l'équation différentielle:  $y' = \xi(y)$ . Pour retrouver les notations des paragraphes précédents, il faut poser  $U' = \mathbb{R} \times U$  et  $f(t, y) = \xi(y)$ ; les solutions maximales seront de la forme  $\varphi : I \rightarrow U$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle ouvert. Ce type d'équation, où le second membre ne dépend pas de  $t$ , est appelé équation autonome. La proposition ci-dessous explique pourquoi : l'évolution d'un point  $y_0$  ne dépend pas de l'heure du départ.

**Proposition 1.3** Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert, un champ de vecteurs. Si  $\varphi : I \rightarrow U$  est une solution de  $y' = \xi(y)$  avec  $\varphi(t_0) = y_0$ , alors  $\varphi_1(t) = \varphi(t + t_0 - t_1)$  est aussi solution, et satisfait les conditions initiales  $\varphi_1(t_1) = y_0$ .

*Preuve:*

$$\varphi_1'(t) = \varphi'(t + t_0 - t_1) = \xi(\varphi(t + t_0 - t_1)) = \xi(\varphi_1(t)) \quad \text{et} \quad \varphi_1(t_1) = \varphi(t_1 + t_0 - t_1) = y_0$$

*q. e. d.*

Les solutions de l'équation  $y' = \xi(y)$  associées à un champ de vecteurs s'appellent orbites du champ, ou encore trajectoires du champ. On les représente généralement par leur image dans  $U$  sur laquelle on indique le sens de parcours (voir figure **III.3**).

Par exemple, l'équation associée au champ de vecteurs  $\xi(x, y) = (x, y)$  :

$$x' = x \quad , \quad y' = y$$

et les trajectoires sont de la forme  $x(t) = x_0 e^t$ ,  $y(t) = y_0 e^t$ , c'est-à-dire des demi droites issues de l'origine, plus la constante égale à l'origine  $(0, 0)$ .

Soient  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts et  $h : U \rightarrow V$  une application  $\mathcal{C}^1$ . Soient encore  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  des champs de vecteurs et supposons que l'on ait :

$$\eta(h(x)) = dh_x(\xi(x)) \quad .$$

On dit alors que  $h$  transporte le champ  $\xi$  sur le champ  $\eta$ , ou encore que  $\eta$  est le transformé du champ  $\xi$  par  $h$ . Remarquons que si  $\varphi : I \rightarrow U$  est une solution de  $y' = \xi(y)$ , alors

$$h(\varphi(t))' = dh_{\varphi(t)}(\varphi(t)') = dh_{\varphi(t)}(\xi(\varphi(t))) = \eta(h(\varphi(t)))$$

ce qui fait que la composée  $h \circ \varphi : I \rightarrow V$  est solution de  $y' = \eta(y)$ . En d'autres termes,  $h$  transporte les trajectoires de  $\xi$  sur des trajectoires de  $\eta$ .

Dans le cas où  $h : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme, pour tout champ  $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  on peut définir  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$\xi(x) = dh_{h(x)}^{-1}(\eta(h(x)))$$

ce qui fait que  $\eta$  est toujours le transformé par  $h$  d'un champ de vecteurs sur  $U$ .

#### Exemples 1.4

- (1) Lorsque  $n = 2$ , appelons  $x = (x_1, x_2)$  les coordonnées à la source et  $y = (y_1, y_2)$  les coordonnées au but de  $h$ . Si  $\eta$  est le transformé de  $\xi$  par  $h$ , on a :

$$\begin{aligned} \eta_1(h(x)) &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) \xi_1(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x) \xi_2(x) \\ \eta_2(h(x)) &= \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x) \xi_1(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x) \xi_2(x) \end{aligned}$$

et l'équation différentielle associée à  $\eta$  s'écrit :

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) \xi_1(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x) \xi_2(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) x_1' + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x) x_2' \\ y_2' &= \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x) \xi_1(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x) \xi_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x) x_1' + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x) x_2' \end{aligned}$$

Par abus de notation, on identifie  $\eta$  à  $(y_1', y_2')$  et  $\xi$  à  $(x_1', x_2')$ ; les équations ci-dessus expriment donc  $\eta$  en termes de  $\xi$ .

- (2) Considérons les coordonnées polaires  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ , le champ  $\eta(x, y) = (-y, x)$  et l'équation associée

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \end{aligned}$$

Pour trouver un champ de vecteurs  $(\rho', \theta')$  dont le transformé par  $h$  donne  $\eta$ , il faut résoudre les équations suivantes, linéaires en  $\xi$  :

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos(\theta) - \rho \sin(\theta) \theta' \\ y' &= \rho' \sin(\theta) + \rho \cos(\theta) \theta' \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque  $x' = -y = -\rho \sin(\theta)$  et  $y' = x = \rho \cos(\theta)$  :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \rho' \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)\theta' = -\rho \sin(\theta) \left| \begin{array}{c} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{array} \right| - \sin(\theta) \\ \text{(II)} \quad & \rho' \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)\theta' = \rho \cos(\theta) \left| \begin{array}{c} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{array} \right| \cos(\theta) \end{aligned}$$

En calculant (I) $\cos(\theta)$ +(II) $\sin(\theta)$  et (I) $(-\sin(\theta))$ +(II) $\cos(\theta)$  comme indiqué, on obtient les deux équations :

$$\rho' = 0 \quad , \quad \rho\theta' = \rho$$

que l'on résout aisément :

$$\rho(t) = R \quad , \quad \theta(t) = t + c$$

où  $R$  et  $c$  sont des constantes arbitraires (si  $R = 0$ ,  $\theta$  est indéterminé). On en tire la solution générale de l'équation de départ :

$$x(t) = R \cos(t + c) \quad , \quad y(t) = R \sin(t + c) \quad .$$

Les solutions sont donc des cercles centrés en 0, parcourus à vitesse angulaire constante dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

- (3) Considérons le champ de vecteurs  $\xi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  sur  $\mathbb{R}^2$ ; il s'agit en fait de l'application  $z \mapsto z^2$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , écrite en termes de  $x = \operatorname{Re}(z)$  et  $y = \operatorname{Im}(z)$ . On voit déjà qu'il admet comme solution la constante  $(0, 0)$ ; on peut donc se borner à considérer  $\xi$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On va étudier ce champ en utilisant les nombres complexes:  $\xi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\xi(z) = z^2$ . Considérons le difféomorphisme  $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $h(z) = 1/z$ , qui est d'ailleurs son propre inverse. On a que  $h'(z) = -1/z^2$ , et donc le champ  $\eta$ , transformé de  $\xi$  par  $h$  est :

$$\eta(h(z)) = h'(z)z^2 = -1 \Rightarrow \eta(z) = -1 \quad ;$$

c'est donc le champ constant égal à  $(-1, 0)$ , dont les orbites sont des droites horizontales  $\varphi(t) = (-t, b)$ . Si on les compose avec  $h$ , on trouve les solutions de l'équation de départ :

$$(x(t), y(t)) = \frac{(-t, -b)}{t^2 + b^2}$$

puisque  $h(z) = 1/z = \bar{z}/z\bar{z} = (x, -y)/(x^2 + y^2)$ ; on en tire que si  $b \neq 0$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2}$$

qui sont les équations de cercles passant par l'origine, centrés en  $(0, -1/(2b))$ . En fait,  $(x(t), y(t)) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , ce qui fait que les orbites sont les cercles ci-dessus privés de  $(0, 0)$ , le point  $(0, 0)$  et les 2 demi-droites constituées par l'axe  $Ox$  privé de l'origine (qui correspondent au cas  $b = 0$  :  $x(t) = -1/t, y(t) = 0$ , pour  $t > 0$  ou  $t < 0$ ) (voir figure III.3).

## 1.2 Classification des systèmes linéaires dans le plan

Nous allons étudier les trajectoires des équations différentielles sur  $\mathbb{R}^2$  de la forme :

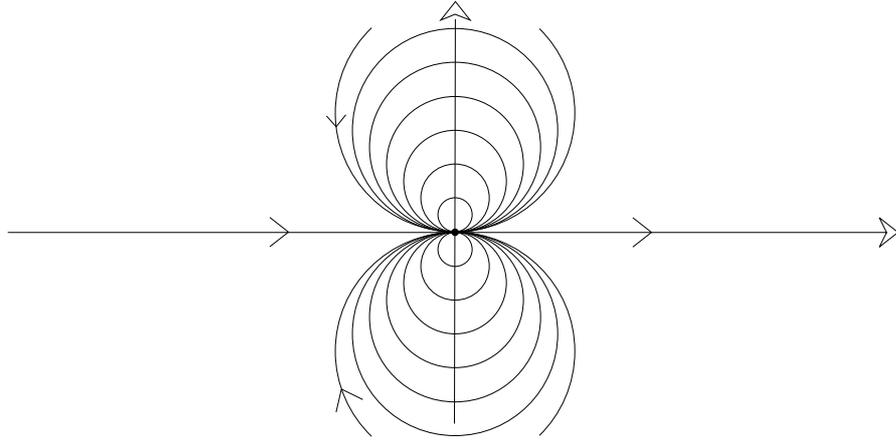
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

c'est-à-dire les trajectoires de champs de vecteurs de la forme :

$$\xi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

qui peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\xi = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad .$$

Figure III.3: Solutions de  $(x, y)' = (x^2 - y^2, 2xy)$ 

Tout d'abord, on va faire de l'algèbre linéaire : on va trouver une transformation linéaire pour mettre la matrice  $M$  sous forme de Jordan (proposition 1.5), puis on va résoudre explicitement les équations dans les différents cas.

Si  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un isomorphisme linéaire, le transformé  $\eta = N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  d'un champ linéaire  $\xi = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  s'écrit :

$$\eta \left( S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = S(\xi(x, y)) = SM \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \eta(x, y) = SMS^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies M = S^{-1}NS$$

En termes de changement de base, si  $v_1, v_2$  est une nouvelle base de  $\mathbb{R}^2$ , et  $S$  la matrice de changement de base, c'est-à-dire la matrice ayant  $v_1$  comme premier vecteur colonne et  $v_2$  comme deuxième vecteur colonne, la matrice  $S^{-1}NS$  est la matrice de l'application linéaire  $\eta$ , écrite dans la base  $v_1, v_2$ . Donc, la formule ci-dessus nous dit que si  $S$  transporte  $\xi$  sur  $\eta$ ,  $\xi$  est le champ linéaire ayant pour matrice  $S^{-1}NS$ , soit la matrice de l'application associée à  $\eta$  écrite dans la nouvelle base  $v_1, v_2$ . Les trajectoires de  $\eta$  seront de la forme  $S(\varphi(t))$ , où  $\varphi(t)$  est une trajectoire de  $\xi$ .

**Proposition 1.5** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Il existe une matrice inversible  $S \in Gl(2, \mathbb{R})$  telle que  $S^{-1}AS$  soit de l'un des 3 types :

$$1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*Preuve:* Soit  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ , où  $I$  est la matrice identité, le polynôme caractéristique de  $A$ , qui est de degré 2. Appelons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les racines de  $p_A(\lambda)$ , qui peuvent être réelles, ou imaginaires conjuguées, distinctes ou non.

(1)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles distinctes

Dans ce cas, il existe deux vecteurs propres  $v_1$  et  $v_2$  linéairement indépendants :  $A(v_1) = \lambda_1 v_1$ ,  $A(v_2) = \lambda_2 v_2$  et donc si on prend  $v_1$  et  $v_2$  comme base de  $\mathbb{R}^2$ , la matrice de l'application associée à  $A$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On écrit  $v_1$  et  $v_2$  comme vecteurs colonne :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$$

Si  $S = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix}$  est la  $2 \times 2$  matrice dont  $v_1$  est la première colonne et  $v_2$  la deuxième colonne, alors :

$$AS = A \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^1 & \lambda_2 v_2^1 \\ \lambda_1 v_1^2 & \lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \implies S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , deux cas peuvent se produire : l'espace propre correspondant peut être de dimension deux, auquel cas on peut prendre pour  $v_1$  et  $v_2$  n'importe quelle paire de vecteurs linéairement indépendants et procéder comme ci-dessus. Ou bien l'espace propre correspondant est de dimension 1; ce cas est traité au numéro 3 ci-dessous.

- (2) Si  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ , mais  $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ , alors  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ . On a donc 2 vecteurs propres linéairement indépendants sur  $\mathbb{C}$ , de la forme  $v$  et  $\bar{v}$ . On prend alors comme base de  $\mathbb{R}^2$  les parties réelles et imaginaires de  $v$  :

$$v_1 = \frac{v + \bar{v}}{2} \quad , \quad v_2 = \frac{v - \bar{v}}{2i} \quad , \quad \text{où } i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C} .$$

Posons  $\lambda_1 = \mu - i\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ), de sorte que  $\lambda_2 = \mu + i\alpha$ . Alors

$$\begin{aligned} A(v_1) &= A \left( \frac{v + \bar{v}}{2} \right) = \frac{(\mu - i\alpha)v + (\mu + i\alpha)\bar{v}}{2} = \mu \frac{v + \bar{v}}{2} - \alpha i \frac{v - \bar{v}}{2} = \mu v_1 + \alpha v_2 \\ A(v_2) &= A \left( \frac{v - \bar{v}}{2i} \right) = \frac{(\mu - i\alpha)v - (\mu + i\alpha)\bar{v}}{2i} = \mu \frac{v - \bar{v}}{2i} - \alpha \frac{v + \bar{v}}{2} = \mu v_2 - \alpha v_1 \end{aligned}$$

La matrice de changement de base  $S$  est obtenue, comme d'habitude, en mettant  $v_1$  en première colonne,  $v_2$  en deuxième colonne. On a donc :  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$ .

- (3) Reste le cas où  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  et l'espace propre correspondant est de dimension 1. Soit  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  le vecteur propre correspondant à  $\lambda$ , et  $w \in \mathbb{R}^2$  un vecteur linéairement indépendant de  $v$ . Alors :

$$A(v) = \lambda_0 v \quad , \quad A(w) = \lambda' w$$

et la matrice de l'application associée à  $A$  s'écrit dans cette nouvelle base :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

d'où on déduit que  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda')$ , et donc  $\lambda' = \lambda_0$ , sans quoi on est dans le cas (1). D'autre part on a aussi que  $a \neq 0$ , sans quoi on est dans le cas où l'espace propre associé à  $\lambda_0$  est  $\mathbb{R}^2$  tout entier, cas déjà traité sous (1). Finalement, la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec } a \neq 0 .$$

Faisons encore le changement de base de la forme  $w' = (1/a) \cdot w$ ; alors  $A(w') = 1/a A(w) = 1/a(av + \lambda_0 w) = v + \lambda_0 w'$ , et donc la matrice de l'application associée à  $A$ , dans la base  $v, w'$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} .$$

Notons que si on fait plutôt le changement de base  $w' = (b/a)w$ ,  $b \neq 0$ , alors la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & b \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad , \quad b \neq 0 .$$

*q.e.d.*

Remarquons que les 3 cas correspondent à :

- (1)  $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{R}$   
 (2)  $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , mais pas sur  $\mathbb{R}$ .  
 (3)  $A$  non diagonalisable

On est donc ramené, par la transformation  $S$ , à étudier les champs de vecteurs de la forme  $\xi = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , où  $A$  est de la forme 1), 2) ou 3) de l'énoncé de la proposition précédente. On va passer à l'étude des divers cas; remarquons que  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  est une trajectoire, dans tous les cas.

- (1)  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . L'équation différentielle s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$$

et la solution ayant pour conditions initiales  $t_0 = 0$  et  $(x_0, y_0)$  s'écrit :

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \quad , \quad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \quad .$$

Si  $x_0 \neq 0$ , on peut écrire :

$$y(t) = y_0 \left( \frac{x(t)}{x_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

ce qui montre que  $x(t)$  doit avoir le même signe que  $x_0$  (sans quoi l'exponentielle  $\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$  n'a pas de sens), et que  $y(t)$  a le même signe que  $y_0$  : les trajectoires restent donc toujours dans le même cadran.

L'allure varie selon les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , les trajectoires sont les points du plan. Lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2$ , les trajectoires sont les demi-droites issues de l'origine.

- (2)  $A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$ . Ici il convient de passer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x' = \mu x - \alpha y \\ y' = \alpha x + \mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho' \cos(\theta) - \rho \sin(\theta) \theta' = \rho(\mu \cos(\theta) - \alpha \sin(\theta)) \\ \rho' \sin(\theta) + \rho \cos(\theta) \theta' = \rho(\alpha \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)) \end{cases}$$

d'où on déduit, comme dans l'exemple 1.4 (2), le système d'équations :

$$\begin{cases} \rho' = \mu \rho \\ \rho \theta' = \rho \alpha \end{cases} .$$

Les solutions s'écrivent sous la forme  $\rho = 0$ , et  $\theta$  indéterminé, ou bien  $\rho = \rho_0 e^{\mu t}$ ,  $\theta = \alpha t + \theta_0$ , où on a pris les conditions initiales  $t_0 = 0$  et  $(\rho_0, \theta_0)$ . Ce sont des spirales qui s'enroulent autour de l'origine, sauf si  $\mu = 0$ , auquel cas on trouve les cercles centrés à l'origine.

- (3)  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

En coordonnées cartésiennes :

$$x = \rho \cos(\theta) = \rho_0 e^{\mu t} \cos(\alpha t + \theta_0) \quad ; \quad y = \rho \sin(\theta) = \rho_0 e^{\mu t} \sin(\alpha t + \theta_0)$$

Ici le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

On vérifie que  $x(t) = e^{\lambda t}(y_0 t + x_0)$ ,  $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$  est effectivement solution, avec condition initiale  $t_0 = 0$  et  $(x_0, y_0)$ . Les trajectoires coupent l'axe  $OY$  pour  $t = -x_0/y_0$ .

Dans le cas d'une matrice  $A$  quelconque, les trajectoires sont les images par l'isomorphisme  $S$  des trajectoires précédentes.

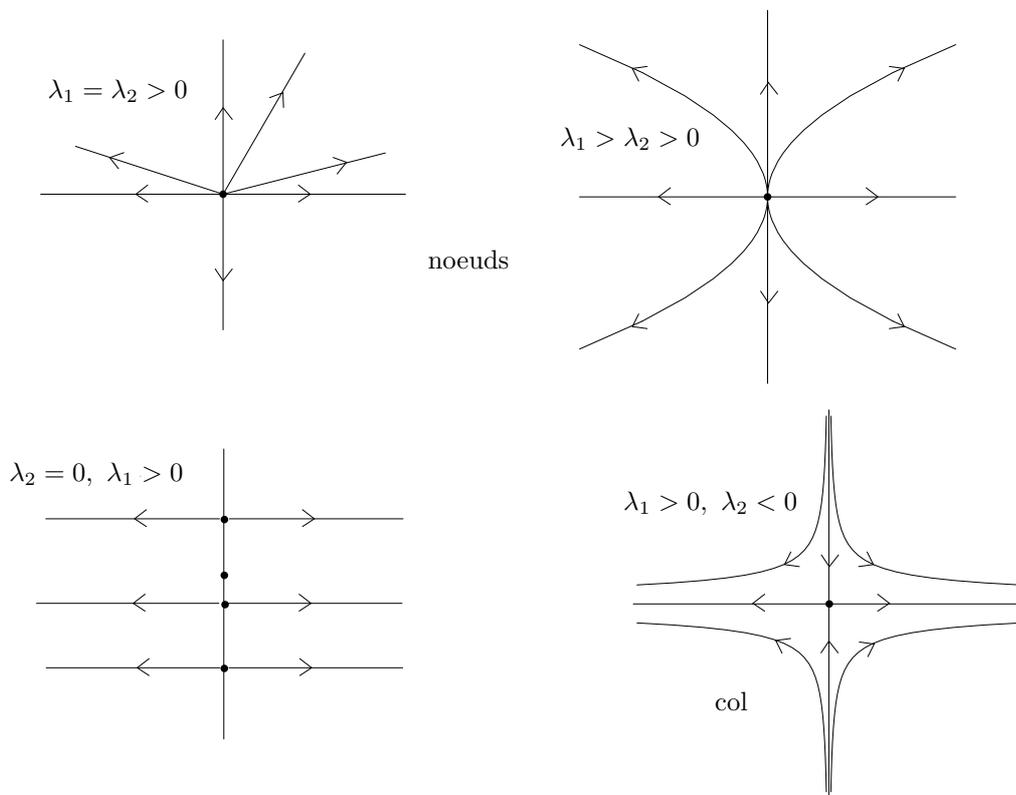


Figure III.4: A diagonalisable sur  $\mathbb{R}$

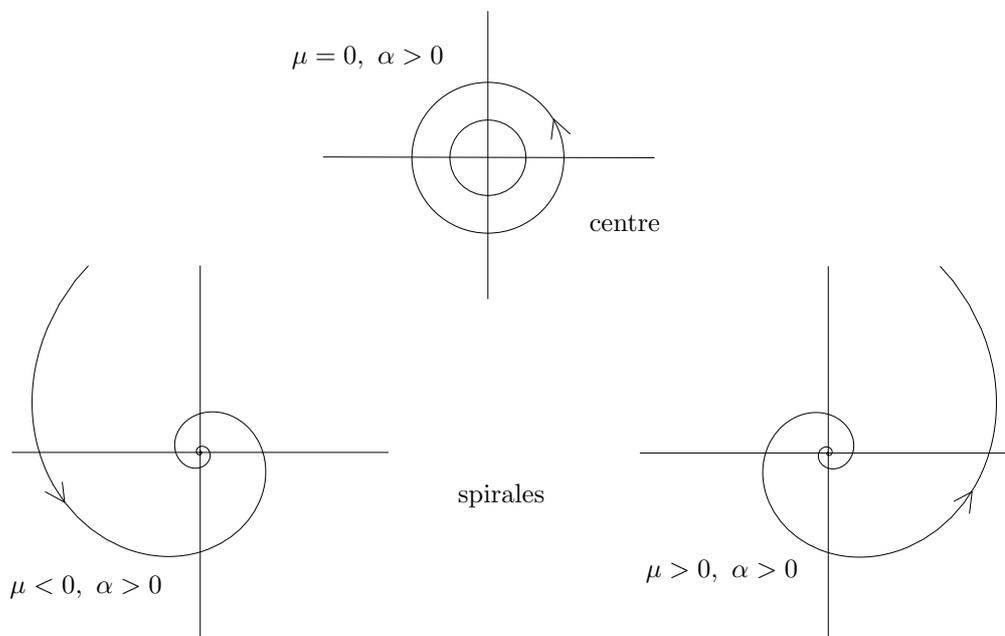


Figure III.5: A diagonalisable sur  $\mathbb{C}$

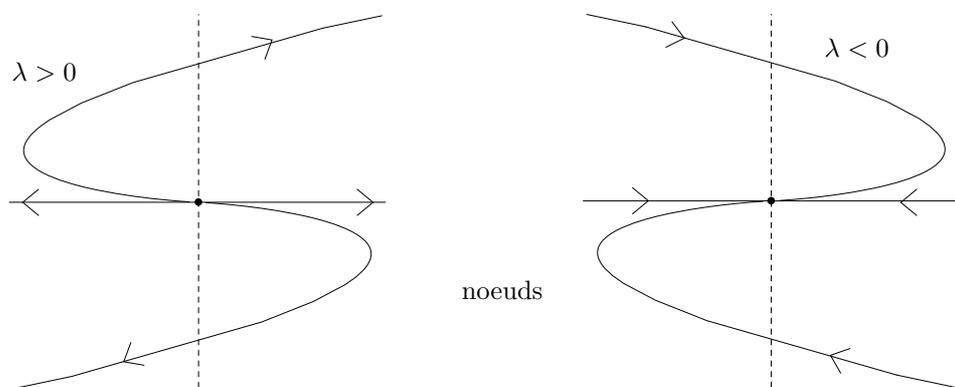


Figure III.6:  $A$  non diagonalisable

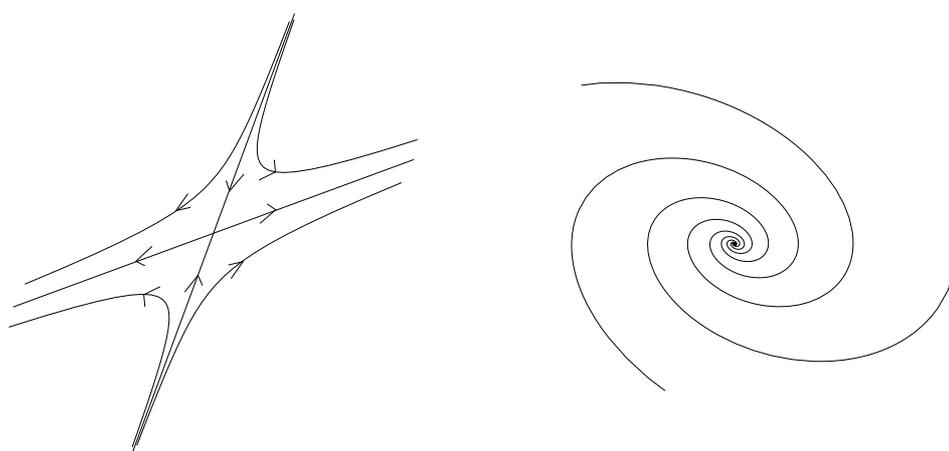


Figure III.7: Exemples d'allure dans une base quelconque

## 2 Théorèmes d'existence et unicité

Dans ce paragraphe nous allons aborder quelques résultats théoriques sur les équations différentielles ordinaires : existence et unicité des solutions, dépendance continue par rapport à des paramètres. Nous basons notre approche sur la méthode des approximations successives, qui est à la source des procédés de résolutions numériques.

**Remarque 2.1** Dire que  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est solution de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$ , avec condition initiale  $(t_0, y_0)$ , équivaut à dire que

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall t \in I$$

ce qui se vérifie immédiatement. La résolution d'une équation différentielle avec condition initiale donnée est ainsi ramené à la résolution d'une équation intégrale, en fait la recherche d'un point fixe de la transformation

$$T(\varphi)_{(t)} = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

En particulier, sous cette forme, il n'est pas nécessaire de supposer que  $\varphi$  est dérivable, cela suit automatiquement si  $\varphi$  est un point fixe, puisque l'expression  $y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$  est dérivable par rapport à  $t$ .

**Définition 2.2** Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , une application continue. On dit que  $f$  est lipschitzienne en  $y$ , de constante de Lipschitz  $k$ , si pour tout  $(t, y_1), (t, y_2) \in A$  on a :

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\| \quad .$$

### Exemples 2.3

- (1) Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors pour tout sous-ensemble  $A \subset U$  de la forme  $A = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b)$ , la restriction  $f|_A$  est lipschitzienne, en prenant :

$$k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right\|, (t, y) \in A \right\} \quad ;$$

cela résulte du théorème des accroissements finis **II.2.6**.

- (2) La fonction  $f(t, y) = f(y) = y^{2/3}$  n'est pas lipschitzienne, même en restriction à des intervalles, lorsque ceux-ci contiennent 0; en effet une inégalité de la forme :

$$|f(y) - f(0)| = y^{2/3} < k |y|$$

entraînerait que  $|y|^{-1/3} \leq k$ , ce qui est absurde.

- (3) Si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application linéaire, alors

$$\|A(y_1) - A(y_2)\| \leq \|A\| \|y_1 - y_2\|$$

et alors  $A$  est lipschitzienne, avec constante de Lipschitz  $\|A\|$ .

- (4) Plus généralement, si  $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, est une application continue, pour tout intervalle fermé borné  $[a, b] \subset I$  on peut poser  $k = \sup \{\|A(t)\|, t \in [a, b]\}$ , et on aura :

$$\|A(t, y_1) - A(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\| \quad .$$

L'application  $A(t, y)$  est donc lipschitzienne en  $y$  sur tout ensemble de la forme  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  contenu dans  $I \times \mathbb{R}^n$ .

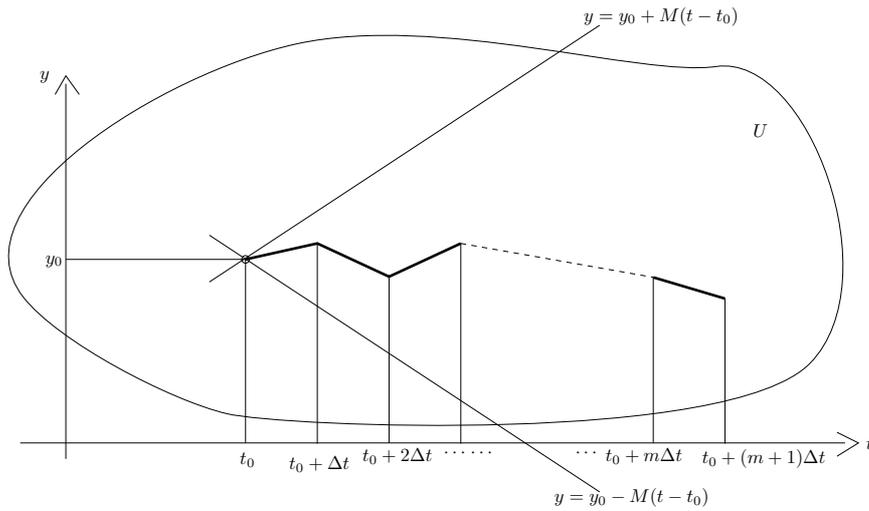


Figure III.8: Construction de solutions approchées

Pour la construction de solutions approchées, nous utiliserons des applications linéaires par morceaux, de la manière suivante. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , et soit  $(t_0, y_0) \in U$  une condition initiale; soit  $N > 0$  un entier, choisissons une quantité  $\Delta t \in \mathbb{R}$ , suffisamment petite, et définissons par récurrence sur  $m$ , pour  $m \leq N$ , une suite de points  $y_m \in \mathbb{R}^n$  :

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot \Delta t, \dots, y_{m+1} = y_m + f(t_0 + m\Delta t, y_m) \cdot \Delta t$$

ce qui a un sens pour autant que  $\Delta t$  soit suffisamment petite pour que  $(t_0 + m\Delta t, y_m) \in U$ ,  $m \leq N$ . On définit alors la solution approchée, pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + N\Delta t$ , par interpolation linéaire des points  $y_m$ ; posons  $t_m = t_0 + m\Delta t$  :

$$\text{pour } t_m \leq t \leq t_{m+1} \text{ on pose : } \varphi_N(t) = y_m + \frac{(t - t_m)}{\Delta t}(y_{m+1} - y_m)$$

Cette application est continue, car les définitions de  $\varphi_N$  aux extrémités des intervalles  $[t_m, t_{m+1}]$  coïncident; mais elles sont seulement dérivables à gauche et à droite aux points  $t_m$ . On dira que de telles applications sont  $C^1$  par morceaux : ce sont des applications continues d'un intervalle  $I$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , continues, continûment dérivables, sauf éventuellement en des points  $t_0, t_1, \dots, t_N \in I$ , où elles admettent tout de même des dérivées à gauche et à droite, limites des dérivées à gauche ou à droite des  $t_i$ .

**Définition 2.4** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert, et soit  $\varepsilon > 0$ . Une  $\varepsilon$ -solution de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  est une application dérivable par morceaux  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , telle que  $\forall t \in I$ ,  $(t, \varphi(t)) \in U$  et vérifiant :

$$\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in I$$

où aux points de discontinuité de  $\varphi'(t)$ , l'inégalité doit être valable autant avec la dérivée à gauche qu'avec la dérivée à droite.

Le lemme suivant résout une inégalité intégrale.

**Lemme 2.5 (Lemme de Gronwall)** Soit  $g : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue,  $g(t) \geq 0$ , et supposons qu'il existe des constantes  $k, B, C > 0$  telles que :

$$g(t) \leq B \quad \text{et} \quad g(t) \leq C + k \int_0^t g(s) ds \quad , \quad \forall t \in [0, c] \quad .$$

Alors, pour tout entier  $n$  on a :

$$g(t) \leq C \left[ 1 + kt + \cdots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} \right] + B \frac{k^n t^n}{n!}$$

et donc, en faisant tendre  $n$  vers  $l'∞$  :

$$g(t) \leq C e^{kt} \quad .$$

*Preuve:* On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ ,  $g(t) \leq B$  par hypothèse. Si l'inégalité est vraie pour  $n - 1$  :

$$g(s) \leq C \left[ 1 + ks + \cdots + \frac{k^{n-2}}{(n-2)!} s^{n-2} \right] + B \frac{k^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!}$$

on remplace cette inégalité dans l'intégrale de l'énoncé :

$$\begin{aligned} g(t) &\leq C + k \int_0^t g(s) ds \leq C + k \int_0^t \left( C \left[ 1 + ks + \cdots + \frac{k^{n-2}}{(n-2)!} s^{n-2} \right] + B \frac{k^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!} \right) ds \\ &= C \left[ 1 + kt + k^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + k^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] + B k^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

*q.e.d.*

Le prochain théorème donne une estimation de l'évolution de l'écart de solutions approchées.

**Théorème 2.6 (L'inégalité fondamentale)** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert. Supposons que  $f$  satisfasse la condition de Lipschitz sur  $U$ , avec constante  $k$ . Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta > 0$ ,  $\varphi_i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des  $\varepsilon_i$  solutions de l'équation  $y' = f(t, y)$ ,  $i=1,2$  :

$$\|\varphi_1'(t) - f(t, \varphi_1(t))\| \leq \varepsilon_1 \quad , \quad \|\varphi_2'(t) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq \varepsilon_2 \quad \forall t \in I \quad .$$

Soit  $t_0 \in I$  et supposons que

$$\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \leq \delta \quad .$$

Alors, pour tout  $t \in I$  on a :

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{k} \left( e^{k|t-t_0|} - 1 \right)$$

où  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

*Preuve:* Pour simplifier la notation, on va supposer que  $t_0 = 0$  et  $t > 0$ ; on ramène le cas général au cas particulier par le changement de variable  $t' = t - t_0$  si  $t > t_0$ , ou  $t' = t_0 - t$  sinon.

Notons que

$$\int_0^t (\varphi_i'(s) - f(s, \varphi_i(s))) ds = \varphi_i(t) - \varphi_i(0) - \int_0^t f(s, \varphi_i(s)) ds$$

et donc

$$\left\| \varphi_i(t) - \varphi_i(0) - \int_0^t f(s, \varphi_i(s)) ds \right\| \leq \varepsilon_i t$$

d'où on déduit que

$$(2-1) \quad \left\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) - (\varphi_1(0) - \varphi_2(0)) - \int_0^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))) ds \right\| \leq \varepsilon t$$

Posons  $w(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$ ; alors :

$$\|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| \leq kw(s) \quad ;$$

notons que d'une égalité de la forme  $\|a - b\| \leq c$  il suit que  $\|a\| = \|a - b + b\| \leq \|a - b\| + \|b\| \leq \|b\| + c$  et alors il suit de (2-1) que

$$w(t) \leq w(0) + \varepsilon t + \left\| \int_0^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))) ds \right\| \leq w(0) + \varepsilon t + k \cdot \int_0^t w(s) ds = w(0) + k \cdot \int_0^t \left( w(s) + \frac{\varepsilon}{k} \right) ds$$

ou encore :

$$w(t) + \frac{\varepsilon}{k} \leq \left( w(0) + \frac{\varepsilon}{k} \right) + k \int_0^t \left( w(s) + \frac{\varepsilon}{k} \right) ds$$

et il suit alors du lemme 2.5 que

$$w(t) + \frac{\varepsilon}{k} \leq \underbrace{\left( w(0) + \frac{\varepsilon}{k} \right)}_{\leq \delta} e^{kt} \implies w(t) \leq \delta e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k} (e^{kt} - 1)$$

q.e.d.

**Corollaire 2.7** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert, et  $f$  satisfait une condition de Lipschitz sur  $U$ , alors, si  $\varphi_1(t), \varphi_2(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux solutions de l'équation  $y' = f(t, y)$ , et qu'il existe  $t_0 \in I$  avec  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ , on a que  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$

En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité fondamentale, avec  $\delta = \varepsilon = 0$ .

Nous allons construire maintenant des  $\varepsilon$ -solutions pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Proposition 2.8** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert. Soit  $(t_0, y_0) \in U$  et supposons que  $A = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \subset U$ . Soit :

$$M = \sup \{ \|f(t, y)\|, (t, y) \in A \} \quad .$$

Alors, si  $0 \leq c \leq \inf \{a, b/M\}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  l'équation  $y' = f(t, y)$  admet une  $\varepsilon$ -solution  $\varphi : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Preuve:* On va définir  $\varphi(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_0 + c$ , le cas  $t_0 - c \leq t \leq t_0$  se traitant de manière semblable. Soit  $N > 0$  un entier et posons  $\Delta t = c/N$  et  $t_m = t_0 + m\Delta t$ ; alors on peut définir par récurrence sur  $m \geq 0$  :

$$y_{m+1} = y_m + f(t_m, y_m)\Delta t \quad , \quad m \leq N$$

car

$$\|y_{m+1} - y_m\| \leq \|f(t_m, y_m)\Delta t\| \leq M \frac{c}{N} \leq M \frac{b}{MN} = \frac{b}{N} \text{ et donc } \|y_m - y_0\| \leq m \frac{b}{N} \leq b$$

ce qui fait que  $y_m$  est bien défini pour  $m \leq N$ . Définissons comme tout-à-l'heure  $\varphi_N : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$\varphi_N(t) = y_m + \frac{(t - t_m)}{\Delta t} (y_{m+1} - y_m) \quad \text{pour } t_m \leq t \leq t_{m+1} \quad m = 0, \dots, N - 1$$

Alors, si  $t \in [t_m, t_{m+1}]$  :

$$\begin{aligned} \heartsuit \quad \|\varphi'_N(t) - f(t, \varphi_N(t))\| &= \left\| \frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t} - f\left(t, y_m + (t - t_m) \frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t}\right) \right\| \\ &= \left\| f(t_m, y_m) - \underbrace{f\left(t, y_m + (t - t_m) \frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t}\right)}_{=y'} \right\| \end{aligned}$$

Or  $A$  est compact, donc  $f|_A$  est uniformément continue. Il existe donc  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tel que si  $|t - t_m| \leq \delta_1$  et  $\|y_m - y'\| \leq \delta_2$ , alors  $\|f(t_m, y_m) - f(t, y')\| \leq \varepsilon$ . Or  $|t - t_m| \leq c/N$  et

$$\left\| y_m + (t - t_m) \frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t} - y_m \right\| = \left\| (t - t_m) \frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t} \right\| \leq \|y_{m+1} - y_m\| = \|f(t_m, y_m)\Delta t\| \leq M \frac{c}{N} \leq \frac{b}{N}$$

On peut donc choisir  $N$  assez grand pour que  $c/N \leq \delta_1$  et  $b/N \leq \delta_2$ , et alors il suit de  $\heartsuit$  que

$$\|\varphi'_N(t) - f(t, \varphi_N(t))\| \leq \varepsilon$$

et donc  $\varphi_N$  est une  $\varepsilon$ -solution.

*q.e.d.*

**Théorème 2.9 (Existence et unicité locales)** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert. Supposons que  $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \subset U$  et que  $f \mid [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b)$  soit lipschitzienne en  $y$ . Soit*

$$M = \sup \{ \|f(t, y)\| \mid (t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \}$$

*Alors, si  $0 \leq c \leq \inf \{a, b/M\}$ , l'équation  $y' = f(t, y)$  possède une et une seule solution  $\varphi : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec condition initiale  $\varphi(t_0) = y_0$ .*

*Preuve:* Soit  $N > 0$  un entier; d'après **2.8**, il existe une  $\frac{1}{N}$ -solution  $\varphi_N : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On va appliquer l'inégalité fondamentale **2.6** pour estimer  $\|\varphi_M(t) - \varphi_N(t)\|$  : on prend  $\varepsilon_1 = \frac{1}{M}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{1}{N}$  et  $\delta = 0$  :

$$\|\varphi_M(t) - \varphi_N(t)\| \leq \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \frac{1}{k} \left( e^{k|t-t_0|} - 1 \right) \leq \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \frac{1}{k} (e^{kc} - 1)$$

Il en suit que  $\{\varphi_N\}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{C}([t_0 - c, t_0 + c], \mathbb{R}^n)$ , qui est complet, et elle possède donc une limite  $\varphi$ . On a :

$$(2-2) \quad \|\varphi'_N(t) - f(t, \varphi_N(t))\| \leq \frac{1}{N} \implies \left\| \varphi_N(t) - \varphi_N(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_N(s)) ds \right\| \leq \frac{c}{N}$$

et puisque  $\|f(s, \varphi_N(s)) - f(s, \varphi(s))\| \leq k \|\varphi_N(s) - \varphi(s)\|$ , la suite  $f(s, \varphi_N(s))$  converge uniformément vers  $f(s, \varphi(s))$ ,  $s \in [t_0 - c, t_0 + c]$ . On peut donc passer à la limite sous le signe intégrale dans (2-2), ce qui donne :

$$\left\| \varphi(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| = 0 \quad \forall t \in [t_0 - c, t_0 + c]$$

et donc  $\varphi(t)$  est bien solution de l'équation  $y' = f(t, y)$ , avec condition initiale  $(t_0, y_0)$ .

L'unicité suit de **2.7**.

*q.e.d.*

**Définition 2.10** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un ouvert. On dit que  $f$  est localement lipschitzienne en  $y$  si  $f$  est continue et si pour tout  $(t_0, y_0) \in U$  il existe  $a, r > 0$  tels que*

- $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, r) \subset U$
- $f \mid [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, r) \subset U$  est lipschitzienne en  $y$ .

En d'autres termes, il existe  $k$  tel que  $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$ ,  $\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ ,  $y_1, y_2 \in \overline{B}(y_0, r)$ .

Par exemple, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a vu dans l'exemple **2.3(1)** qu'elle est localement lipschitzienne en  $y$ .

**Proposition 2.11** *Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne. Soient  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux solutions de l'équation  $y' = f(t, y)$ . Supposons qu'il existe  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  tel que  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ . Alors*

$$\varphi_1 \mid I_1 \cap I_2 = \varphi_2 \mid I_1 \cap I_2 \quad .$$

*et on peut donc recoller  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  en une solution  $\varphi : I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  en posant :*

$$t \in I_1 \cup I_2 \quad , \quad \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in I_1 \\ \varphi_2(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

*Preuve:* L'ensemble

$$X = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \varphi_1|[t_0, t] = \varphi_2|[t_0, t]\}$$

est non vide, car  $X \ni t_0$ .

Soit donc  $\tau_+ = \sup(X) \leq +\infty$ ; si  $\tau_+$  est strictement inférieur aux extrémités droites de  $I_1$  et de  $I_2$ , alors  $\tau_+ < \infty$  et  $\varphi_1(\tau_+) = \varphi_2(\tau_+)$ ; on peut alors appliquer **2.7** sur un petit intervalle  $[\tau_+, \tau_+ + \varepsilon]$  pour conclure que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  coïncident sur cet intervalle, ce qui implique que  $\tau_+ + \varepsilon \in X$ , contradiction. Même raisonnement à gauche de  $t_0$ ; il en suit que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  coïncident effectivement sur  $I_1 \cap I_2$ .

*q.e.d.*

**Théorème 2.12 (Existence et unicité globales)**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne. Alors, pour tout  $(t_0, y_0) \in U$ , l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  possède une et une seule solution maximale  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant  $(t_0, y_0)$  comme condition initiale. L'intervalle  $I$  est ouvert.

*Preuve:* Soit  $\psi : I_\psi \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution; supposons que  $I$  soit fermé, borné à droite, et notons par  $t_2 \in I_\psi$  cette borne. On peut appliquer le théorème d'existence et unicité locales **2.9** pour inférer l'existence d'une solution  $\psi_1 : [t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec condition initiale  $(t_2, \psi(t_2))$ ; on peut alors prolonger  $\psi$  à  $I \cup [t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon[$  en posant :

$$\overline{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \leq t_2 \\ \psi_1(t) & \text{si } t \geq t_2 \end{cases}.$$

De même, si  $I$  est fermé, borné à gauche par  $t_1$ , on peut prolonger  $\psi$  à un intervalle de la forme  $]t_1 - \varepsilon, t_1] \cup I$ . Il en suit que si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution maximale, ou non prolongeable,  $I$  doit être un intervalle ouvert.

Posons

$$S = \{\psi : I_\psi \rightarrow \mathbb{R}^n \mid I \text{ est ouvert et } \psi \text{ est solution avec conditions initiales } (t_0, y_0)\}$$

On sait par le théorème d'existence de solutions locales que  $S$  est non vide. On pose alors  $I_{\max} = \cup_{\psi \in S} I_\psi$ , et on définit  $\varphi : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ainsi : si  $x \in I_{\max}$ , il existe  $\psi$  tel que  $x \in I_\psi$ ; on pose  $\varphi(x) = \psi(x)$ . Il suit de la proposition **2.11** que cette définition est cohérente, et il est immédiat que  $\varphi$  est l'unique solution maximale. *q.e.d.*

Le résultat suivant nous fournit un renseignement sur le comportement des solutions maximales.

**Théorème 2.13** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ouvert, localement lipschitzienne en  $y$ , et soit  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale de l'équation  $y' = f(t, y)$ . Alors, pour tout compact  $K \subset U$  il existe  $a_K, b_K$  avec  $a < a_K < b_K < b$  tels que  $(t, \varphi(t)) \notin K$ ,  $\forall t$  tel que  $a < t < a_K$  ou  $b_K < t < b$ .

Ce que nous dit ce théorème en particulier, c'est que si  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $b < \infty$ , alors si  $t \rightarrow b$ ,  $(t, \varphi(t))$  doit sortir de tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , et donc nécessairement  $\|\varphi(t)\| \rightarrow \infty$ . C'est ce qui se produit dans l'exemple **1.2(1)** lorsque  $C > 0$ .

*Preuve:*

*1er cas:*  $b = +\infty$  (ou  $a = -\infty$ ). Dans ce cas, l'affirmation n'apporte rien d'essentiel. En effet,  $K$  est borné et donc il existe  $R > 0$  tel que  $K \subset [-R, +R] \times \mathbb{R}^n$ , et alors si  $t > R$ ,  $(t, \varphi(t)) \notin K$ .

*2ème cas:*  $b < \infty$  (ou  $a > -\infty$ ). On procède par l'absurde. Si le  $b_K$  de l'énoncé n'existe pas, alors  $\forall n, \exists t_n \in [b - 1/n, b[$  tel que  $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$ . Puisque  $K$  est compact, on peut extraire une suite  $t_{n_k}$  telle que  $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k}))$  converge vers  $(b, y_0) \in K \subset U$ . On peut choisir un  $c > 0$  tel que les conclusions du théorème d'existence et unicité locales **2.9** soient vraies pour tous les points d'un ouvert  $V$  contenant  $(b, y_0)$ . En particulier, si  $k$  est assez grand,  $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k})) \in V$ , et donc il existe une unique solution  $\varphi_k(t) : [t_{n_k} - c, t_{n_k} + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec condition initiale  $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k}))$ , et par unicité on doit avoir que  $\varphi_k(t) = \varphi(t)$  pour  $t \in [t_{n_k} - c, t_{n_k} + c]$ . Or si l'on choisit  $k$  assez grand pour qu'en plus  $|b - t_{n_k}| \leq c/2$ , on pourra prolonger  $\varphi$  au delà de  $b$ , ce qui contredit sa maximalité.

*q.e.d.*

**Théorème 2.14 (Complément au théorème d'existence et unicité globales)**

Soient  $U = ]t_1, t_2[ \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue telle que pour tout  $\tau_1, \tau_2$ ,  $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$  il existe  $k_{\tau_1, \tau_2}$  tel que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k_{\tau_1, \tau_2} \|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \in [\tau_1, \tau_2] \quad .$$

Alors  $\forall (t_0, y_0) \in ]t_1, t_2[ \times \mathbb{R}^n$  il existe une et une seule solution  $\phi : ]t_1, t_2[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec conditions initiales  $(t_0, y_0)$ .

*Preuve:* Soit  $T < t_2$  et  $\varphi : [t_0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution de l'équation  $y' = f(t, y)$ , et soit  $y_0 = \varphi(t_0)$ . On va appliquer l'inégalité fondamentale pour comparer  $\varphi$  avec la solution constante  $\varphi_0 \equiv y_0$ ; puisque  $\varphi'_0 \equiv 0$ , si  $t \in [t_0, T[$  :

$$\|\varphi'_0 - f(t, \varphi_0)\| \leq M = \sup \{\|f(t, y_0)\|, t \in [t_0, T]\}$$

et en appliquant l'inégalité fondamentale avec  $\varepsilon = M$ ,  $\delta = 0$ ,  $k = k_{t_0, T}$  il vient :

$$\|\varphi(t) - y_0\| \leq M \frac{(e^{k(T-t_0)} - 1)}{k} \quad \forall t \in [t_0, T[$$

ce qui implique que  $\varphi(t)$  est bornée sur  $[t_0, T[$ , donc pas maximale, d'après **2.13**. Avec un argument symétrique à gauche de  $t_0$ , on voit finalement que les solutions maximales doivent être définies sur  $]t_1, t_2[$ .  
*q.e.d.*

Ce complément sera utilisé au § 3.1 ci-dessous.

Le théorème suivant est une conséquence facile de l'inégalité fondamentale et du théorème **2.13**.

**Théorème 2.15 (Dépendance continue par rapport aux conditions initiales)** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  encore et toujours un ouvert,  $f$  localement lipschitzienne en  $y$ . Soit  $(t_0, y_0) \in U$ ,  $\varphi_{(t_0, y_0)} : I_{(t_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solution maximale ayant  $(t_0, y_0)$  comme condition initiale. Alors, pour tout intervalle fermé, borné  $I \subset I_{(t_0, y_0)}$ ,  $I \ni t_0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2 > 0$  tels que si  $|t_1 - t_0| < \delta_\varepsilon^1$  et  $\|y_1 - y_0\| < \delta_\varepsilon^2$ , si  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la solution maximale de conditions initiales  $(t_1, y_1)$ , on a :

$$i) \quad I_1 \supset I$$

$$ii) \quad \|\varphi_1(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in I.$$

*Preuve:* On note  $\varphi_0$  la solution avec condition initiale  $(t_0, y_0)$ , et  $I_{t_0, y_0}$  son intervalle (ouvert) de définition. Soit  $I \subset I_{(t_0, y_0)}$  fermé, borné et soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $\varepsilon' \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon' > 0$ , posons :

$$K_{\varepsilon'} = \{(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n \mid \|y - \varphi_0(t)\| \leq \varepsilon'\} \quad .$$

$K_{\varepsilon'}$  est compact, et pour  $\varepsilon'$  assez petit,  $K_{\varepsilon'} \subset U$ . Soient  $\delta_1, \delta_2 > 0$  suffisamment petits pour que

$$|t_1 - t_0| < \delta_1, \quad \|y_1 - y_0\| < \delta_2 \Rightarrow (t_1, y_1) \in U \quad .$$

Soit  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solution maximale de condition initiale  $(t_1, y_1)$  et soit  $M = \sup \{\|f(t, x)\| \mid (t, y) \in K_{\varepsilon'}\}$ . Si  $\delta_1$  est assez petit, pour  $s$  entre  $t_0$  et  $t_1$  on aura  $(s, \varphi_1(s)) \in K_{\varepsilon'}$  et alors :

$$\|\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi_1(s)) ds \right\| \leq M \cdot |t_1 - t_0| \leq M \cdot \delta_1$$

et donc :

$$\|\varphi_1(t_0) - \varphi_0(t_0)\| \leq \|\varphi_1(t_0) - \varphi_1(t_1)\| + \|\varphi_1(t_1) - \varphi_0(t_0)\| \leq M \cdot \delta_1 + \delta_2 \quad .$$

Il suit alors de l'inégalité fondamentale que

$$(2-3) \quad \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \leq (\delta_2 + M\delta_1)e^{k(b-t_0)} \quad , \quad t \in I \cap I_1$$

où  $b$  désigne l'extrémité droite de  $I$ . Choisissons  $\delta_1, \delta_2$  assez petits pour que  $(\delta_2 + \delta_1 M)e^{k(b-t_0)} < \varepsilon'$ . Il suit alors de (2-3) que  $(t, \varphi_1(t)) \in K_{\varepsilon'}$  si  $t \in I_1$ ,  $t < b$  et il suit de **2.13** que  $I_1 \supset ]t_0, b[$ ; même raisonnement pour l'extrémité gauche de  $I$ . L'affirmation ii) suit aussi de (2-3).

*q.e.d.*

Définissons le flot  $\Phi$  de l'équation par :

$$\Omega = \{(t_0, y_0, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t \in I_{(t_0, y_0)}\} \text{ et } \Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(t_0, y_0, t) = \varphi_{(t_0, y_0)}(t)$$

$\Phi$  est la famille de toutes les solutions maximales. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent.

**Corollaire 2.16**  $\Omega$  est un ouvert et  $\Phi$  est continue.

### 3 Equations différentielles linéaires

#### 3.1 Résultats généraux

Un système de  $n$  équations linéaires d'ordre 1 s'écrit

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}(t)y_1 + \cdots + a_{1,n}(t)y_n + b_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n,1}(t)y_1 + \cdots + a_{n,n}(t)y_n + b_n(t) \end{aligned}$$

où les  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  et les  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des applications continues d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Si l'on pose

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = (a_{i,j}(t)) : I \rightarrow M(n, n, \mathbb{R}), \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

où  $M(n, n, \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , alors on peut écrire le système de façon plus succincte:

$$y' = A(t)(y) + b(t) \quad .$$

Si  $b(t)$  est identiquement nulle on parle de système *homogène*, sinon de système *inhomogène* ou *non homogène*.

Si  $[\tau_1, \tau_2] \subset I$ ,

$$\|A(t)(y_1) + b(t) - (A(t)(y_2) + b(t))\| \leq \|A(t)\| \|y_1 - y_2\| \leq \sup \{\|A(t)\|, t \in [\tau_1, \tau_2]\} \|y_1 - y_2\|$$

et donc il suit de **2.14** que les solutions maximales sont définies sur  $I$  tout entier. La structure de l'espace des solutions maximales d'une équation linéaire est très simple, comme les deux résultats suivants nous le montrent.

**Théorème 3.1** *L'ensemble  $S$  des solutions maximales du système linéaire homogène  $y' = A(t)(y)$ , où  $A : I \rightarrow M(n, n, \mathbb{R})$  est continue, est un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de l'espace vectoriel de toutes les applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}^n$ .*

*Preuve:* Soit  $S$  l'espace des solutions de  $y' = A(t)(y)$ . Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des solutions maximales et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on vérifie immédiatement que  $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$  est aussi une solution, ce qui fait que  $S$  est bien un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Choisissons  $t_0 \in I$  et définissons  $ev : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $ev(\varphi) = \varphi(t_0)$ , i.e.  $ev$  est l'évaluation en  $t_0$ . Alors  $ev$  est une application linéaire et il suit de **2.12** que  $ev$  est un isomorphisme:

- $ev$  est injective parce que si  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = y_0$ , alors  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux solutions maximales avec mêmes conditions initiales et donc coïncident.
- $ev$  est surjective parce que si  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  il existe  $\varphi \in S$  avec condition initiale  $(t_0, y_0)$ , c'est-à-dire que  $ev(\varphi) = y_0$ .

*q.e.d.*

Une base  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  de  $S$  est appelée un système fondamental de solutions.

**Proposition 3.2** Soit  $y' = A(t)y + b(t)$  une équation linéaire non homogène,  $A : I \rightarrow M(n, n, \mathbb{R})$  et  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continues. Si  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une solution particulière de cette équation, toute autre solution est de la forme  $\varphi(t) + \theta(t)$ , où  $\varphi(t)$  est une solution de l'équation linéaire homogène associée:  $y' = A(t)y$ .

*Preuve:* Si  $\theta_1(t)$  est une solution du système non homogène, alors en posant  $\varphi(t) = \theta(t) - \theta_1(t)$  on a

$$\varphi'(t) = \theta'(t) - \theta_1'(t) = A(t)(\theta(t)) + b(t) - (A(t)(\theta_1(t)) + b(t)) = A(t)(\theta(t) - \theta_1(t)) = A(t)(\varphi(t))$$

ce qui montre que  $\varphi(t)$  est solution du système homogène, et  $\theta_1 = \theta + \varphi$ .

*q.e.d.*

Voyons comment trouver les solutions d'un système non homogène à partir d'un système fondamental  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de solutions du système homogène (méthode dite de la variation des constantes). Soit  $\Phi(t) : I \rightarrow M(n, n, \mathbb{R})$  la matrice dont la  $j$ -ème colonne est le vecteur  $\varphi_j(t)$  :

$$\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))_{i,j=1,\dots,n}, \text{ où } \varphi_j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_j^1(t) \\ \vdots \\ \varphi_j^n(t) \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

(1)  $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$  (produit matriciel) parce que les  $\varphi_i(t)$  sont des solutions.

(2)  $\Phi(t)$  est inversible pour tout  $t \in I$ , car si  $\Phi(t_0)C = 0$ , où  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , cela veut dire que

$\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t_0) = 0$ . Donc  $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$  est la solution avec conditions initiales  $(t_0, 0)$ , tout comme la solution identiquement nulle. Par unicité des solutions maximales, on a donc que  $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) = 0 \forall t \in I$  et puisque les  $\varphi_i(t)$  sont linéairement indépendantes, on doit avoir  $c_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

On cherche des solutions de la forme  $\theta(t) = \Phi(t) \cdot C(t)$ , où  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On a :

$$\theta'(t) = \Phi'(t) \cdot C(t) + \Phi(t) \cdot C'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \cdot C(t) + \Phi(t) \cdot C'(t)$$

et on aimerait que

$$\theta'(t) = A(t)(\theta(t)) + b(t)$$

c'est-à-dire :

$$A(t) \cdot \Phi(t) \cdot C(t) + \Phi(t) \cdot C'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \cdot C(t) + b(t) \Rightarrow C'(t) = \Phi(t)^{-1} \cdot b(t)$$

Donc  $C(t)$  doit être une primitive de l'application  $\Phi(t)^{-1} \cdot b(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En refaisant le chemin à l'envers, on voit réciproquement que pour toute primitive  $C(t)$  de  $\Phi(t)^{-1}b(t)$ ,  $\Phi(t)C(t)$  est solution de l'équation non homogène (ajouter une constante  $C \in \mathbb{R}^n$  à une primitive  $C(t)$  équivaut à ajouter à  $\theta(t)$  la solution  $\Phi(t) \cdot C$  du système homogène).

### 3.2 Complexification

Soit  $M(n, n, \mathbb{C})$  l'espace des  $n \times n$  matrices à coefficients complexes. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  :

$$\psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Si  $C : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire, on en déduit une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $C_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{C} & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{C_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

c'est à dire:  $C_{\mathbb{R}} = \psi^{-1}C\psi$ . En termes de matrices, si  $C = (\alpha_{k,\ell} + i\beta_{k,\ell})$  et  $A = (\alpha_{k,\ell})$ ,  $B = (\beta_{k,\ell})$  on vérifie que:

$$C_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} .$$

D'autre part, on a une inclusion naturelle

$$M(n, n, \mathbb{R}) \subset M(n, n, \mathbb{C})$$

induite par l'inclusion  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto x + i \cdot 0$  et donc si l'on a une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on en déduit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et soit  $C : I \rightarrow M(n, n, \mathbb{C})$  une application continue; on peut regarder l'équation linéaire correspondante:

$$y' = C(t)y .$$

En passant à  $C_{\mathbb{R}}$  on voit que l'on peut lui appliquer les résultats du § 3.1 : les solutions maximales sont définies sur tout  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ , et forment un sous-espace vectoriel de dimension  $2n$  sur  $\mathbb{R}$  de l'espace de toutes les applications de  $I$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Mais il suit immédiatement du fait que  $C(t)$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire que l'espace des solutions est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , et il devra donc être de dimension  $n$  sur  $\mathbb{C}$ .

Si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  est une application, on définit sa conjuguée  $\bar{\varphi}$  comme étant l'application qui envoie  $t \in I$  sur  $\overline{\varphi(t)}$ , c'est-à-dire le complexe conjugué de  $\varphi(t)$ . On définit de même  $Re(\varphi)$  et  $Im(\varphi)$  en prenant respectivement les parties réelles et imaginaires de  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ .

**Proposition 3.3** Soit  $A : I \rightarrow M(n, n, \mathbb{R})$  continue,  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et soient  $S_{\mathbb{R}}$  l'espace des solutions de  $y' = A(t)y$ ,  $S_{\mathbb{C}}$  l'espace des solutions de  $y' = A_{\mathbb{C}}(t)y$ . Alors

- (1) si  $\varphi \in S_{\mathbb{C}}$ , alors  $\bar{\varphi} \in S_{\mathbb{C}}$ .
- (2)  $S_{\mathbb{R}} = \{\varphi \in S_{\mathbb{C}} \mid \varphi = \bar{\varphi}\}$ .
- (3) Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S_{\mathbb{C}}$  forment une  $\mathbb{C}$ -base de  $S_{\mathbb{C}}$ , alors les  $Re(\varphi_i)$ ,  $Im(\varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  engendrent  $S_{\mathbb{R}}$  sur  $\mathbb{R}$ .

La preuve de cette proposition est immédiate et elle est laissée au lecteur.

**Exemple 3.4** Reprenons l'équation de l'exemple 1.4(2):

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{cases} , \text{ soit } y' = A(y) \text{ où } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} , A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Puisque  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$ ,  $A$  admet  $\pm i$  comme valeurs propres. On vérifie que  $v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de valeur propre  $i$  :  $A(v) = i \cdot v$ . Il en suit que  $\phi(t) = e^{it} \cdot v$  est solution; en effet :

$$(e^{it} \cdot v)' = ie^{it} \cdot v = A(e^{it} \cdot v) .$$

Donc  $Re(e^{it}v) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$  et  $Im(e^{it}v) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  sont solutions réelles, et on vérifie qu'elles sont linéairement indépendantes; elles forment donc une base des solutions réelles de l'équation.

### 3.3 Equations linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants

Il s'agit de l'équation:

$$(3-1) \quad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ ou } a_i \in \mathbb{C} .$$

On ramène cette équation d'ordre  $n$  à un système d'équations d'ordre 1 par la procédé général décrit au §1. On pose:

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = x' \quad , \quad y_n = x^{(n-1)}$$

et on obtient le système équivalent:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 & , & & y_2' &= y_3 & , & & \dots & , & & y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \dots - a_n y_1 \end{aligned}$$

soit, sous forme matricielle:

$$(3-2) \quad y' = Ay \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_n & & \dots & & -a_1 \end{pmatrix} .$$

Si  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivement  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , est une solution de (3-2) avec condition initiales  $\varphi(t_0) = y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})$ , alors la première composante  $\varphi_1(t)$  de  $\varphi(t)$  est solution de l'équation de départ (3-1), et les conditions initiales peuvent s'écrire:

$$\varphi_1(t_0) = y_{01} , \quad \varphi_1'(t_0) = y_{02} , \quad \dots , \quad \varphi_1^{(n-1)}(t_0) = y_{0n} .$$

Les solutions forment donc encore un espace vectoriel de dimension  $n$  (respectivement sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Aussi, on peut parler de la complexifiée de l'équation (3-1) dans le cas où  $a_i \in \mathbb{R}$ , ce qui revient à regarder les  $a_i$  comme des complexes à partie imaginaire nulle.

A une équation du type (3-1) on associe le polynôme à coefficients réels (respectivement complexes):

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

que l'on appelle polynôme caractéristique de l'équation. On voit facilement que  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ , où  $A$  est la matrice de (3-2) et  $I$  denote la matrice de l'identité. Que l'on soit dans le cas  $a_i \in \mathbb{R}$  ou  $a_i \in \mathbb{C}$ , on considère les racines complexes distinctes  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, m$  et on dénote par  $\alpha_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$ . On aura alors:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m} \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad , \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n .$$

Le théorème suivant donne une description complète des solutions de l'équation (3-1) (ou de sa complexifiée) à partir des racines du polynôme caractéristique et de leur multiplicité.

**Théorème 3.5** *Supposons que le polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  de l'équation  $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$  s'écrive sous la forme*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m} \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j .$$

Alors les  $n$  fonctions

$$t^j e^{\lambda_i t} \quad , \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

forment une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions de l'équation.

*Preuve:* A tout polynôme  $q(\lambda) = \sum_{\ell=0}^k b_\ell \lambda^\ell$  on peut associer une application linéaire  $q(D)$  de l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  des applications  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , dans lui-même, en posant:

$$q(D)(\varphi) = \sum_{\ell=0}^k b_\ell \varphi^{(\ell)} .$$

Si l'on désigne encore par  $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  l'opération de dérivation, on peut encore écrire  $q(D) = \sum_{\ell=0}^k b_\ell D^\ell$ , où  $D^0 = I =$  identité. On voit que  $D \cdot q(D) = q(D) \cdot D$ , et de là on déduit que si  $r(\lambda)$  est un autre polynôme,  $q(D)r(D) = r(D)q(D)$ . En particulier, pour tout  $i = 1, \dots, m$  on peut écrire:

$$p(D) = q_i(D)(D - \lambda_i I)^{\alpha_i} \quad , \quad \text{où} \quad q_i(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j} .$$

Notre équation peut s'écrire:

$$p(D)(x) = 0 \quad .$$

Vérifions que les fonctions  $t^j e^{\lambda_i t}$ ,  $0 \leq j \leq \alpha_i - 1$  sont solutions de l'équation. Du fait que

$$(D - \lambda_i I)(t^j e^{\lambda_i t}) = j t^{j-1} e^{\lambda_i t} + t^j \lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i t^j e^{\lambda_i t} = j t^{j-1} e^{\lambda_i t} \quad \text{si } j \geq 1$$

et  $(D - \lambda_i I)(e^{\lambda_i t}) = \lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i e^{\lambda_i t} = 0$  on déduit que

$$(D - \lambda_i I)^{\alpha_i}(t^j e^{\lambda_i t}) = 0 \quad \text{si } j \leq \alpha_i - 1$$

et donc

$$p(D)(t^j e^{\lambda_i t}) = q_i(D)(D - \lambda_i I)^{\alpha_i}(t^j e^{\lambda_i t}) = 0 \quad \text{si } j \leq \alpha_i - 1 \quad .$$

Reste à voir que les  $t^j e^{\lambda_i t}$ ,  $0 \leq j \leq \alpha_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que s'il existe  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$  tels que  $\sum_{0 \leq j < \alpha_i, 1 \leq i \leq m} a_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} = 0$ , alors  $a_{i,j} = 0 \forall i, j$ . Or

$$\sum_{0 \leq j < \alpha_i, 1 \leq i \leq m} a_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} = \sum_{1 \leq i \leq m} P_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où les  $P_i(t) = \sum_{0 \leq j < \alpha_i} a_{i,j} t^j$  sont des polynômes. L'indépendance linéaire de ces solutions résultera donc du lemme ci-dessous.

*q.e.d.*

**Lemme 3.6** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ , et soient  $P_i(t)$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Si

$$\sum_{i=1}^k P_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0$$

alors  $P_i(t) \equiv 0$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

*Preuve:* Par induction sur  $k$ . Si  $k=1$ , l'égalité

$$P_1(t) e^{\lambda_1 t} \equiv 0$$

entraîne  $P_1(t) \equiv 0$ , parce l'exponentielle ne s'annule jamais.

Supposons  $k > 1$  et montrons que si le résultat est vrai pour  $k - 1$  il l'est aussi pour  $k$ . Dans l'égalité

$$\sum_{i=1}^k P_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0$$

divisons par  $e^{\lambda_1 t}$ . On obtient:

$$(3-3) \quad P_1(t) + \sum_{i=2}^k P_i(t) e^{\mu_i t} \equiv 0$$

où  $\mu_i = \lambda_i - \lambda_1$ ,  $i = 2, \dots, k$ . On a que  $\mu_i \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, k$  et  $\mu_i - \mu_j \neq 0$  si  $i \neq j$ . En dérivant (3-3) on obtient:

$$P_1'(t) + \sum_{i=2}^k (\mu_i P_i(t) + P_i'(t)) e^{\mu_i t} \equiv 0$$

et en dérivant  $\ell$ -fois on obtient une égalité de la forme:

$$(3-4) \quad P_1^{(\ell)}(t) + \sum_{i=2}^k (\mu_i^\ell P_i(t) + Q_i(t)) e^{\mu_i t} \equiv 0$$

où  $Q_i(t)$  est un polynôme de degré strictement inférieur au degré de  $P_i(t)$  si  $P_i \neq 0$ . Si l'on prend  $\ell = \text{degré}(P_1) + 1$  on aura que  $P_1(t)^{(\ell)} \equiv 0$  et il suit alors de (3-4) et de l'hypothèse d'induction que

$$\mu_i^\ell P_i(t) + Q_i(t) \equiv 0 \quad , \quad i = 2, \dots, k$$

Puisque  $Q_i$  doit être de degré strictement inférieur au degré de  $P_i$ , on a que  $P_i \equiv 0$ ,  $i = 2, \dots, k$ , et en remplaçant dans (3-4) on voit que  $P_1 \equiv 0$ .

*q.e.d.*

**Remarque 3.7** Le théorème 3.5 nous donne en fait les solutions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  de l'équation, même si l'on est dans le cas où les coefficients  $a_i$  sont réels. Dans ce cas on peut trouver une base de l'espace vectoriel  $S_{\mathbb{R}}$  des solutions réelles de la manière suivante; si les  $a_i$  sont réels, les racines du polynôme caractéristique peuvent être énumérées ainsi :

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_h$$

avec  $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = k+1, \dots, h$ . On pose encore  $\alpha_i =$  multiplicité de  $\lambda_i$ , et on remarque que la multiplicité de  $\bar{\lambda}$  est égale à la multiplicité de  $\lambda$ , de sorte que

$$n = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_h \quad .$$

On sait d'après 3.3 que  $S_{\mathbb{R}}$  est engendré par

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Re}(t^j e^{\lambda_i t}) \\ \parallel \\ \text{Re}(t^j e^{\bar{\lambda}_i t}) \end{array} \right\} , \quad \left. \begin{array}{l} \text{Im}(t^j e^{\lambda_i t}) \\ \text{Im}(t^j e^{\bar{\lambda}_i t}) = -\text{Im}(t^j e^{\lambda_i t}) \end{array} \right\} \quad i = 1, \dots, k \quad , \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \\ \text{et } t^j e^{\lambda_i t} \quad i = k+1, \dots, h \quad . \end{array} \right\}$$

Il suffit donc de prendre les  $n$  fonctions

$$\begin{array}{l} \text{Re}(t^j e^{\lambda_i t}) \quad , \quad \text{Im}(t^j e^{\lambda_i t}) \quad , \quad i = 1, \dots, k, \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \\ t^j e^{\lambda_i t} \quad , \quad i = k+1, \dots, h, \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \end{array}$$

pour engendrer  $S_{\mathbb{R}}$ ; comme cet espace est de dimension  $n$ , cette dernière liste de fonctions est une base de l'espace vectoriel  $S_{\mathbb{R}}$ .

**Définition 3.8** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On appelle quasi-polynôme de degré  $\ell$  et d'exposant  $\lambda$  toute fonction de la forme  $P(t)e^{\lambda t}$ , où  $P(t)$  est un polynôme de degré au plus  $\ell$  à coefficients complexes. On denote par  $Q_\lambda^\ell$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de ces fonctions.

On parle de quasi-polynôme réel si  $\lambda$  et les coefficients de  $P(t)$  sont réels.

Notons que  $Q_\lambda^\ell$  admet comme base les  $\ell+1$  fonctions:  $e^{\lambda t}$ ,  $t e^{\lambda t}$ ,  $\dots$ ,  $t^\ell e^{\lambda t}$ . Le théorème suivant permet de ramener la construction d'une solution particulière d'une équation linéaire d'ordre  $n$  dont le second membre est un quasi-polynôme à la résolution d'une équation (algébrique) linéaire.

**Théorème 3.9** L'équation

$$(3-5) \quad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = e^{\lambda t} b(t)$$

où  $b(t)$  est un polynôme de degré  $\ell$  a pour solution particulière un unique quasi-polynôme de la forme

$$t^\nu c(t) e^{\lambda t}$$

où  $c(t) = c_0 + c_1 \cdot t + \dots + c_\ell \cdot t^\ell$  est un polynôme de degré  $\ell$  et  $\nu$  est la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique de l'équation (3-5):  $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$  (si  $\lambda$  n'est pas une racine de  $p(t)$ , on pose  $\nu = 0$ ). Plus précisément, l'équation linéaire

$$p(D)(t^\nu c(t) e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} b(t) \quad ,$$

dans laquelle les inconnues sont les  $\ell+1$  coefficients  $c_0, \dots, c_\ell$  de  $c(t)$ , est de rang maximum.

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme suivant:

**Lemme 3.10** *L'application linéaire*

$$p(D) : Q_\lambda^{\ell+\nu} \rightarrow Q_\lambda^\ell$$

est surjective et son noyau est:

$$\text{Ker}(p(D)) = \left\{ \sum_{j=0}^{\nu-1} c_j t^j e^{\lambda t} \mid 0 \leq j \leq \nu - 1, c_i \in \mathbb{C} \right\} .$$

*Preuve:* Puisque

$$(3-6) \quad D(t^j e^{\lambda t}) = \begin{cases} t^{j-1} e^{\lambda t} + t^j \lambda e^{\lambda t} & \text{si } j > 0 \\ \lambda e^{\lambda t} & \text{sinon} \end{cases}$$

on a bien que  $p(D)$  envoie  $Q_\lambda^\ell$  dans lui-même.

Supposons d'abord que  $p(\lambda) \neq 0$  et essayons de décrire la matrice de  $p(D) : Q_\lambda^\ell \rightarrow Q_\lambda^\ell$  dans la base  $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^\ell e^{\lambda t}$ . Il suit de (3-6) que la matrice de  $D$  s'écrit:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

d'où on voit que

$$D^i = \begin{pmatrix} \lambda^i & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^i \end{pmatrix}$$

et donc

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que  $\det(p(D)) \neq 0$ , et donc  $p(D)$  est un isomorphisme, ce qui démontre le lemme dans ce cas.

Si  $\nu > 0$ , on peut écrire  $p(D) = q(D)(D - \lambda I)^\nu$ , où  $q(t)$  est un polynôme de degré  $n - \nu$ , avec  $q(\lambda) \neq 0$ . D'après la première partie de cette preuve,  $q(D)$  est un isomorphisme, et il suit de **3.5** que le noyau de  $(D - \lambda I)^\nu$  est engendré par les  $e^{\lambda t}, 0 \leq j \leq \nu - 1$ . Puisque  $p(D) = q(D)(D - \lambda I)^\nu$  et que  $q(D)$  est un isomorphisme, le noyau de  $p(D)$  et celui de  $(D - \lambda I)^\nu$  coïncident, et le lemme en suit aussitôt.

*q.e.d.*

**Exemple 3.11** Considérons l'équation

$$(3-7) \quad y'' - y = t e^t .$$

Ici  $\lambda = 1$ ,  $p(t) = t^2 - 1$  et  $p(1) = 0$ , avec  $\nu = 1$ . D'après **3.9** on a une solution particulière  $\phi(t)$  de la forme:

$$\phi(t) = t e^t (c_0 + c_1 t)$$

On a :

$$\phi'(t) = e^t (c_0 + c_0 t + 2c_1 t + c_1 t^2) \text{ et } \phi''(t) = e^t (2c_0 + 2c_1 + (c_0 + 4c_1)t + c_1 t^2) .$$

En remplaçant dans (3-7) on obtient le système de 2 équations linéaires:

$$4c_1 = 1 \quad , \quad 2c_0 + 2c_1 = 0$$

d'où l'on tire que  $c_1 = 1/4$ ,  $c_0 = -1/4$  et donc  $\phi(t) = t e^t (t - 1)/4$ . Pour avoir le système complet des solutions, il faut ajouter à  $\phi(t)$  une solution quelconque de l'équation homogène  $y'' - y = 0$ .

### 3.4 Systèmes linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation

$$(3-8) \quad y' = A(y)$$

où  $A \in M(n, n, \mathbb{R})$  ou  $M(n, n, \mathbb{C})$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) une solution et supposons qu'elle soit indéfiniment dérivable. En dérivant (3-8) et en substituant on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= A(\varphi'(t)) = A(A(\varphi(t))) = A^2(\varphi(t)) \\ &\vdots \\ \varphi^{(k)}(t) &= A^k(\varphi(t)) \end{aligned}$$

où  $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-fois}}$  est le produit matriciel de  $A$   $k$ -fois avec elle-même. La série de Taylor de  $\varphi(t)$  en  $t_0$  s'écrit donc, en posant  $\varphi(t_0) = y_0$ :

$$y_0 + A(y_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}A^2(y_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k(y_0)(t - t_0)^k + \cdots$$

ce qui ressemble à la série de Taylor d'une exponentielle (c'est même exactement le cas pour  $n = 1$ ). Ceci nous incite à généraliser la fonction exponentielle comme suit.

**Proposition 3.12** Soit  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ . La suite

$$s_k(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k$$

converge dans  $M(n, n, \mathbb{C})$ , uniformément sur toute boule  $\{A \mid \|A\| \leq r\}$ .

*Preuve:* Supposons que  $\|A\| \leq r$ . Puisque  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ , on a:

$$(3-9) \quad \|s_{k+\ell} - s_k\| \leq \frac{1}{(k+1)!} \|A\|^{k+1} + \cdots + \frac{1}{(k+\ell)!} \|A\|^{k+\ell} \leq \sum_{h=k}^{k+\ell} \frac{1}{h!} r^h .$$

Or la série de nombre réels  $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} r^h$  converge vers l'exponentielle ordinaire  $e^r$ , donc elle satisfait la condition de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ tel que } k \geq K_\varepsilon \Rightarrow \sum_{h=k}^{k+\ell} \frac{1}{h!} r^h < \varepsilon \quad \forall \ell \geq 0$$

et en remplaçant dans (3-9) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ tel que } k \geq K_\varepsilon \Rightarrow \|s_{k+\ell}(A) - s_k(A)\| < \varepsilon \quad \forall \ell \geq 0$$

ce qui veut dire que  $s_k(A)$  satisfait la condition d'être une suite de Cauchy uniformément en  $A$ , pour  $\|A\| \leq r$ . Puisque  $M(n, n, \mathbb{C})$  est complet (comme tout espace vectoriel normé de dimension finie), le résultat en suit aussitôt.

*q.e.d.*

La proposition précédente nous autorise à poser:

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(A) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

et cela définit une application

$$e : M(n, n, \mathbb{C}) \rightarrow M(n, n, \mathbb{C}) \quad , \quad A \mapsto e^A$$

que l'on appelle exponentielle de matrices. Notons que si  $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ , alors  $e^A \in M(n, n, \mathbb{R})$ .

**Exemples 3.13**

(1) Soient  $A \in M(m, m, \mathbb{C})$  et  $B \in M(n, n, \mathbb{C})$ , et considérons la matrice de  $M(m+n, m+n, \mathbb{C})$  :  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

On vérifie aisément que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$$

et de là il suit que

$$e^{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix} .$$

On en déduit que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , l'exponentielle de la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est égale à

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(2) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On vérifie que  $A^2 = 0$ , et donc

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2}_{=0} + 0 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De même, si  $N \in M(n, n, \mathbb{C})$ , et  $N^k = 0$ , alors

$$e^N = I + N + \dots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} .$$

Dans l'exemple (1) on voit que l'exponentielle d'une matrice diagonale se ramène à l'exponentielle ordinaire. Dans l'exemple (2) il en va tout autrement : l'exponentielle d'une matrice nilpotente (i.e. dont une puissance est nulle) se calcule par un nombre fini d'opérations d'addition et multiplication.

Une propriété importante de l'exponentielle ordinaire est de transformer la somme en produit:  $e^{a+b} = e^a e^b$ . Cela reste vrai si on remplace  $a$  et  $b$  par des matrices  $A$  et  $B$  qui commutent (mais ce n'est pas vrai en général, voir plus loin l'exemple **3.18**) :

**Proposition 3.14** Soient  $A, B \in M(n, n, \mathbb{C})$  et supposons que

$$AB = BA .$$

Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B .$$

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant, de nature plutôt technique :

**Lemme 3.15** Soient  $\{A_i\}_{i=0, \dots, \infty}$  et  $\{B_j\}_{j=0, \dots, \infty}$ ,  $A_i, B_j \in M(n, n, \mathbb{C})$  deux suites de matrices. Alors si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| < \infty \text{ et } \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| < \infty$$

on a que

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} B_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} A_i B_j \right) .$$

*Preuve:* Posons

$$W_n = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i+j=k} A_i B_j \right) \text{ et } w_k = \sum_{i+j=k} \|A_i\| \|B_j\| .$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^n w_k = \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} \|A_i\| \|B_j\| \leq \left( \sum_{i=0}^n \|A_i\| \right) \left( \sum_{j=0}^n \|B_j\| \right) \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| \right) < \infty$$

la suite  $W_n$  converge. D'autre part :

$$\begin{aligned} \left\| W_{2n} - \left( \sum_{i=0}^n A_i \right) \left( \sum_{j=0}^n B_j \right) \right\| &= \left\| \sum_{\substack{i,j > n \\ i+j \leq 2n}} A_i B_j \right\| \leq \sum_{\substack{i,j > n \\ i+j \leq 2n}} \|A_i\| \|B_j\| \\ &\leq \sum_{i+j \leq 2n} \|A_i\| \|B_j\| - \sum_{i+j \leq n} \|A_i\| \|B_j\| = W'_{2n} - W'_n \end{aligned}$$

où  $W'_n = \sum_{k=0}^n w_k$ . Mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} (W'_{2n} - W'_n) = 0$  puisque  $W'_n$  converge. Comme  $W_n$  converge,  $W_{2n}$  et  $W_n$  ont même limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} B_j \right)$ .

*q.e.d.*

*Preuve de 3.14.* Pour commencer calculons  $(A+B)^2$  :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

et puisque  $AB = BA$  par hypothèse, on a que  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , (mais si  $AB \neq BA$  cette formule est fautive! – voir exemple 3.18). En fait, la formule usuelle du binôme de Newton se généralise, en procédant par induction sur  $k$  et en utilisant que  $AB = BA$ :

$$(A+B)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} A^p B^{k-p}$$

où  $\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$ . Or d'après 3.15 :

$$\left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \right) \left( \sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} k! \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k$$

et donc  $e^A e^B = e^{A+B}$ .

*q.e.d.*

**Corollaire 3.16** La matrice  $e^A$  est inversible,  $\forall A \in M(n, n, \mathbb{C})$ .

En effet,  $A$  et  $-A$  commutent, donc:

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I .$$

Par un changement linéaire de coordonnées on peut parfois ramener une matrice à une matrice dont l'exponentielle est plus simple à calculer (par exemple une matrice diagonale), le lemme suivant nous sera utile.

**Lemme 3.17** Si  $S \in M(n, n, \mathbb{C})$  est inversible,

$$S(e^A)S^{-1} = e^{SAS^{-1}} \quad \forall A \in M(n, n, \mathbb{C}) \quad .$$

*Preuve:* En effet:

$$S(e^A)S^{-1} = S\left(I + A + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots\right)S^{-1} = SIS^{-1} + SAS^{-1} + \dots + \frac{1}{k!}SA^kS^{-1} + \dots$$

et puisque  $(SAS^{-1})^k = SAS^{-1}SAS^{-1} \dots SAS^{-1} = SA^kS^{-1}$ ,

$$S(e^A)S^{-1} = I + SAS^{-1} + \dots + \frac{1}{k!}(SAS^{-1})^k + \dots = e^{SAS^{-1}} \quad ,$$

*q.e.d.*

**Exemple 3.18** On veut calculer l'exponentielle de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On voit tout de suite que 1 et 2 sont des valeurs propres de  $A$ , et on calcule que les vecteurs propres correspondants sont  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On pose alors  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et on a:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$e^A = S\left(e^{S^{-1}AS}\right)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Notons que

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ce qui montre que l'hypothèse  $AB = BA$  dans **3.14** est bien nécessaire.

Le prochain résultat généralise la formule de dérivation de l'exponentielle ordinaire:  $(e^{at})' = ae^{at}$ .

**Théorème 3.19** Soit  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$  et  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ . On a:

$$(3-10) \quad \frac{d}{dt} (e^{tA})_{t=t_0} = e^{t_0A} A = A e^{t_0A} \quad .$$

*Preuve:* Soit  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ . Alors puisque  $t_0A$  et  $hA$  commutent, d'après 3.13  $e^{(t_0+h)A} = e^{t_0A}e^{hA}$  et donc:

$$\begin{aligned} \frac{e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A}}{h} &= e^{t_0A} \left( \frac{e^{hA} - I}{h} \right) = e^{t_0A} \left( \frac{I + hA + \frac{h^2}{2!}A^2 + \dots - I}{h} \right) \\ &= e^{t_0A} \left( A + h \left( \frac{A^2}{2!} + \dots \right) \right) \rightarrow e^{t_0A} A \quad \text{si } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et enfin, puisque  $A$  et  $t_0A$  commutent,  $e^{t_0A}$  et  $A$  commutent aussi.

*q.e.d.*

**Corollaire 3.20** La solution maximale de l'équation  $y' = Ay$  ayant pour conditions initiales  $(t_0, y_0)$  a pour expression:

$$(3-11) \quad \varphi(t) = e^{(t-t_0)A}(y_0)$$

*Preuve:* En effet, si l'on dérive le membre de droite de (3-11) en utilisant (3-10) on obtient:

$$\varphi(t)' = e^{(t-t_0)A} (A(y_0)) = Ae^{(t-t_0)A}(y_0) = A(\varphi(t))$$

et d'autre part  $\varphi(t_0) = e^{0A}(y_0) = I(y_0) = y_0$

*q. e. d.*

La résolution de  $y' = A(y)$  se ramène donc au calcul d'une exponentielle de matrice.

**Exemple 3.21** Considérons l'équation

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (y)$$

Les valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont les racines du polynôme  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2$ , c'est-à-dire  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2$ . Les vecteurs propres correspondants sont  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc si l'on pose  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , on aura que  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , où  $S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Puisque  $e^{(t-t_0)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}$  la solution générale de l'équation de départ aura pour expression

$$Se^{(t-t_0)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}(y_0) = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (2e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)})y_0^1 + 2(-e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)})y_0^2 \\ (-e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)})y_0^1 + (e^{-(t-t_0)} + 2e^{2(t-t_0)})y_0^2 \end{pmatrix} .$$

Le théorème d'algèbre linéaire qui suit est utile pour calculer l'exponentielle d'une matrice; nous l'admettons, sans démonstration.

**Théorème 3.22 (Théorème de décomposition)** Soit  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$  et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  ses valeurs propres distinctes,  $n_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$ , de sorte que le polynôme caractéristique de  $A$  s'écrit :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \prod_{i=1, \dots, k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

et  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Posons :

$$V_i = \text{Ker}(A - \lambda_i I)^{n_i} \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad .$$

Alors on a :

- i) Les  $V_i$  sont invariants par  $A$  : si  $v \in V_i$ , alors  $A(v) \in V_i$ .
- ii)  $V_i$  est de dimension  $n_i$  et  $V_i \cap V_j = \{0\}$ , pour  $i \neq j$ , de sorte que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1, \dots, k} V_i$$

■

Il en suit que si l'on choisit une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathbb{C}^n$  de sorte que  $e_1, \dots, e_{n_1}$  soit une base de  $V_1$ ,  $e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}$  une base de  $V_2$ , et ainsi de suite, la matrice de l'application linéaire associée à  $A$  dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où  $A_i$  est la matrice de  $A|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$ . Posons  $N_i = A_i - \lambda_i I$ , de sorte que  $A = \lambda_i I + N_i$ , et  $N_i^{n_i} = 0$ ; on a :

$$e^{(t-t_0)A} = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{(t-t_0)A_k} \end{pmatrix}$$

et puisque  $\lambda_i I$  et  $N_i$  commutent :

$$e^{(t-t_0)A_i} = e^{(t-t_0)\lambda_i} \left( I + tN_i + \dots + \frac{(t-t_0)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} N_i^{n_i-1} \right) .$$

Si  $v = v_1 + \dots + v_k \in \mathbb{C}^n$ , avec  $v_i \in V_i$ , la solution de l'équation  $y' = A(y)$  avec condition initiale  $(t_0, v)$  s'écrit donc sous la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k e^{(t-t_0)\lambda_i} \left( I + tN_i + \dots + \frac{(t-t_0)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} N_i^{n_i-1} \right) (v_i) = \sum_{i=1}^k e^{(t-t_0)\lambda_i} P_i(t)$$

où  $P_i(t)$  est un polynôme en  $t$  de degré au plus  $n_i - 1$ , à coefficients des vecteurs de  $V_i$ .

Plus précisément, on a démontré le résultat suivant :

**Théorème 3.23** *Les solutions de l'équation  $y' = A(y)$  sont de la forme :*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k e^{(t-t_0)\lambda_i} P_i(t)$$

où  $P_i(t)$  est un polynôme à coefficients des vecteurs de  $V_i$  de degré exactement :

$$\text{degré}(P_i(t)) = \inf \left\{ \ell_i \geq 1 \mid N_i^{\ell_i} = 0 \right\} - 1 .$$

Ce degré est au plus égal à la multiplicité de  $\lambda_i$  moins 1.

■

### 3.5 Equations d'ordre deux à points singuliers réguliers

Considérons l'équation :

$$(3-12) \quad a_0(t) \cdot y'' + a_1(t) \cdot y' + a_2(t) \cdot y = 0$$

où  $a_0(t)$ ,  $a_1(t)$  et  $a_2(t)$  sont des fonctions analytiques (i.e. développables en série au voisinage de tout point), définies pour  $t$  dans un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $t_0 \in I$  est un point singulier de cette équation si  $a_0(t_0) = 0$ . Posons :

$$P(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \quad , \quad Q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \quad ;$$

alors l'équation

$$(3-13) \quad y'' + P(t) \cdot y' + Q(t) \cdot y = 0$$

est définie et a les mêmes solutions que (3-12) en dehors des points singuliers. Il suit de **2.4** que les solutions maximales sont définies sur tout intervalle contenu dans  $I$  ne contenant pas de point singulier, et sur un tel intervalle elles forment un espace vectoriel de dimension 2 d'après **3.1**.

On dit que le point singulier  $t_0$  est régulier si les fonctions

$$(t - t_0) \cdot P(t) \quad \text{et} \quad (t - t_0)^2 \cdot Q(t)$$

sont analytiques au voisinage de  $t_0$ .

En quelque sorte, les points singuliers réguliers sont singuliers, mais pas trop. Nous verrons dans ce qui suit comment décrire des solutions de l'équation (3-13) au voisinage des points singuliers réguliers à l'aide des développements en série de  $(t - t_0) \cdot P(t)$  et  $(t - t_0)^2 \cdot Q(t)$  au point  $t_0$ . On commence par l'équation d'Euler, qui est un cas relativement simple, puis on passe au cas général.

**L'équation d'Euler**

Il s'agit de l'équation  
(3-14)

$$t^2 \cdot y'' + \alpha \cdot t \cdot y' + \beta \cdot y = 0$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. On vérifie immédiatement que  $t = 0$  est un point singulier régulier. Cherchons une solution au voisinage de ce point, tout d'abord pour  $t > 0$ , de la forme :

$$\varphi(t) = t^r$$

où  $r$  est une valeur à déterminer. On a :

$$\varphi'(t) = r \cdot t^{r-1} \quad , \quad \varphi''(t) = r(r-1) \cdot t^{r-2}$$

et en remplaçant dans (3-14) :

$$r(r-1) \cdot t^2 \cdot t^{r-2} + \alpha \cdot t \cdot r \cdot t^{r-1} + \beta \cdot t^r = 0$$

ce qui se ramène à l'équation :

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

qui s'appelle *équation indicielle*. Les solutions sont :

$$r_1 = \frac{-(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-(\alpha-1) - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad .$$

Trois cas se présentent :

- (1)  $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$ . Dans ce cas  $r_1$  et  $r_2$  sont réels, distincts. Alors  $t^{r_1}$  et  $t^{r_2}$  sont des solutions et on vérifie qu'elles sont linéairement indépendantes.
- (2)  $(\alpha-1)^2 - 4\beta < 0$ . Dans ce cas, si  $r = \lambda + i \cdot \mu$  est l'une des racines de l'équation indicielle,  $\mu \neq 0$  et l'autre est  $\lambda - i \cdot \mu$ . On a :

$$t^r = e^{(\lambda+i\mu)\log(t)} = t^\lambda (\cos(\mu \cdot \log(t)) + i \sin(\mu \cdot \log(t)))$$

et en prenant les parties réelles et imaginaires on obtient les deux solutions linéairement indépendantes :

$$t^\lambda \cos(\mu \cdot \log(t)) \quad , \quad t^\lambda \sin(\mu \cdot \log(t)) \quad .$$

- (3)  $(\alpha-1)^2 - 4\beta = 0$ . Dans ce cas on obtient seulement la solution  $t^{r_1}$ . Mais  $F(r) = (r-r_1)^2$ , donc  $F(r_1) = F'(r_1) = 0$  et si on considère ce cas comme cas limite des précédents, cela suggère de dériver  $t^r$  par rapport à  $r$  pour obtenir une deuxième solution. Posons :

$$\psi(t) = \frac{\partial}{\partial r} (t^r)_{r=r_1} = (\log(t) \cdot t^r)_{r=r_1} = \log(t) \cdot t^{r_1}$$

Pour vérifier que c'est une solution, définissons l'opérateur  $L$  sur les fonctions  $\varphi(t)$  par :

$$L(\varphi) = t^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \cdot t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta \cdot \varphi$$

et remarquons qu'il commute avec l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial r}$ ; ainsi :

$$L\left(\frac{\partial t^r}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r} (L(t^r)) = \frac{\partial}{\partial r} (t^r \cdot F(r)) = t^r \cdot \log(t) \cdot F(r) + t^r \cdot F'(r)$$

et si on pose  $r = r_1$  cette dernière expression est nulle, ce qui montre bien que  $\psi(t) = \log(t) \cdot t^{r_1}$  est une solution, dont on vérifie facilement qu'elle est linéairement indépendante de  $t^{r_1}$ .

Pour lever la restriction que  $t > 0$ , il suffit de remplacer dans les solution ci-dessus  $t$  par  $|t|$ .

**Le cas général**

On se place dans le cas d'une équation d'ordre deux à point singulier régulier en  $t = 0$ , soit :

$$y'' + P(t) \cdot y' + Q(t) \cdot y$$

où  $t \cdot P(t) = \alpha(t)$  et  $t^2 \cdot Q(t) = \beta(t)$  sont développables en série au voisinage de  $t = 0$ . On a donc :

$$\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot t^k \quad , \quad \beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot t^k \quad , \quad \text{pour } |t| < \rho$$

et l'équation peut s'écrire :

$$(3-15) \quad t^2 \cdot y'' + t \cdot \alpha(t) \cdot y' + \beta(t) \cdot y = 0 \quad .$$

On travaille de nouveau avec  $t > 0$  pour commencer; on va chercher une solution de la forme

$$\varphi(t) = t^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^k$$

où  $c_0 \neq 0$  (sinon on devrait remplacer  $r$  par  $r + 1$ ...). Il s'agit donc de déterminer  $r$  et les coefficients  $c_k$ . Pour cela, remplaçons dans (3-15) :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^{k+r} \quad , \quad \beta(t) \cdot \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+r} \left( \sum_{j=0}^k c_j \cdot \beta_{k-j} \right) \\ \varphi'(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (k+r) \cdot t^{k+r-1} \quad , \quad t \cdot \alpha(t) \cdot \varphi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+r} \left( \sum_{j=0}^k c_j \cdot \alpha_{k-j} \cdot (j+r) \right) \\ \varphi''(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (k+r) \cdot (k+r-1) \cdot t^{k+r-2} \quad , \quad t^2 \cdot \varphi''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (k+r) \cdot (k+r-1) \cdot t^{k+r} \end{aligned}$$

et en remplaçant dans (3-15) on obtient :

$$t^r \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left[ (k+r)(k+r-1) \cdot c_k + \left( \sum_{j=0}^k c_j \cdot \alpha_{k-j} \cdot (j+r) \right) + \sum_{j=0}^k c_j \cdot \beta_{k-j} \right] \right\} = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$\# \quad t^r \left\{ \left( (r(r-1) + \alpha_0 \cdot r + \beta_0) \cdot c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \left[ (k+r)(k+r-1) \cdot c_k + \sum_{j=0}^k ((j+r) \cdot \alpha_{k-j} + \beta_{k-j}) \cdot c_j \right] \right) \right\} = 0 \quad .$$

Si l'on pose

$$F(r) = r(r-1) + \alpha_0 \cdot r + \beta_0$$

en annulant les coefficients de  $t^k$  dans # on obtient les équations :

$$F(r) = 0$$

que l'on appelle encore équation indicelle, ainsi que

$$(3-16) \quad F(r+k) \cdot c_k + \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r) \alpha_{k-j} + \beta_{k-j}] \cdot c_j = 0 \quad .$$

Choisissons  $c_0 \neq 0$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  les racines (éventuellement non réelles) de l'équation indicelle, numérotées de sorte que la partie réelle de  $r_1$  soit au moins égale à celle de  $r_2$ ; cela assure que  $F(r_1) = 0$ , mais  $F(r_1+k) \neq 0$

pour tout entier positif  $k$ . On peut alors résoudre les équations (3-17) dans lesquelles on a remplacé  $r = r_1$ , par induction sur  $k$ , pour exprimer  $c_k$  en fonction des  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ ,  $j \leq k$ .

On peut montrer, mais nous ne le ferons pas ici, que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$  ainsi trouvée converge, sur le même domaine  $|t| < \rho$  que les séries de  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  (voir par exemple [9][chap. 5, sec. 31, appendix A].)

Si  $t < 0$ , en posant  $\varphi(t) = (-t)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$  et en remplaçant dans (3-15), on trouve le même système d'équations (3-17) pour les  $c_k$ . On trouve ainsi une première solution de (3-15) sous la forme :

$$\varphi_1(t) = |t|^{r_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^k \quad .$$

Si on suppose en plus que  $r_1 - r_2$  n'est ni zéro, ni un entier positif, on obtient une deuxième solution en remplaçant  $r = r_2$  dans (3-17); si on choisit à nouveau  $c'_0 \neq 0$  et on appelle  $c'_k$ ,  $k \geq 1$  les solutions de (3-17), la fonction

$$\varphi_2 = |t|^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k \cdot t^k$$

est une deuxième solution de (3-15), linéairement indépendante de  $\varphi_1(t)$ .

**Exemple 3.24 (L'équation hypergéométrique de Gauss)** Il s'agit de l'équation :

$$(3-17) \quad t(1-t) \cdot y'' + [c - (a+b+1)t] \cdot y' - ab \cdot y = 0$$

où  $a, b, c$  sont des constantes. On peut la mettre sous la forme :

$$y'' + P(t) \cdot y' + Q(t) \cdot y = 0 \quad \text{avec} \quad P(t) = \frac{c - (a+b+1)t}{t(1-t)} \quad , \quad Q(t) = -\frac{ab}{t(1-t)}$$

et donc  $t = 0$  et  $t = 1$  sont des points singuliers. On a :

$$(3-18) \quad \alpha(t) = t \cdot P(t) = [c - (a+b+1)t](1+t+t^2+\dots) \quad , \quad \beta(t) = t^2 \cdot Q(t) = -abt(1+t+t^2+\dots)$$

d'où l'on déduit que  $t = 0$  est un point singulier régulier. On montre de manière semblable que  $t = 1$  est un point singulier régulier. On va se concentrer sur  $t = 0$ ; on déduit de (3-19) que  $\alpha_0 = c$ ,  $\beta_0 = 1$  et l'équation indicelle s'écrit alors :

$$r(r-1) + c \cdot r = 0$$

et les racines sont  $r_1 = 0$  et  $r_2 = 1 - c$ . Supposons que  $c$  ne soit pas un entier négatif ou nul. Ce qui précède montre alors que l'on a une solution de (3-18) de la forme :

$$\varphi(t) = t^0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

où les  $c_k$  peuvent être déterminés en remplaçant  $y = \varphi(t)$  dans (3-18). Cela nous donne :

$$(t-t^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + [c - (a+b+1)t] \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} - ab \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \equiv 0$$

on en tire le coefficient de  $t^k$ ,  $k \geq 1$  :

$$-k(k-1)c_k + k(k+1)c_{k+1} - (a+b+1)k c_k + c(k+1)c_{k+1} - abc_k = 0$$

et de là la formule de récurrence pour déterminer les  $c_k$  :

$$c_{k+1} = c_k \frac{k(k-1) + k(a+b+1) + ab}{(k+1)(c+k)} = c_k \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} \quad .$$

Si on choisit  $c_0 = 1$ , on trouve :

$$c_1 = \frac{ab}{c} \quad , \quad c_2 = \frac{ab(a+1)(b+1)}{c \cdot 2(c+1)} \quad , \quad c_3 = \frac{ab(a+1)(b+1)(a+2)(b+2)}{c \cdot 2(c+1) \cdot 3(c+2)}$$

et alors

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)b(b+1) \cdots (b+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)}$$

On pose

$$F(a, b, c, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)b(b+1) \cdots (b+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)} t^k$$

et on l'appelle fonction hypergéométrique. Notons que

$$F(1, b, b, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

et on retrouve donc la série géométrique de raison  $t$  (qui converge pour  $|t| < 1$ ). Pour d'autres valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  on retrouve toute sorte de fonctions intéressantes. Si  $a$  ou  $b$  sont des entiers négatifs ou nuls, c'est un polynôme, puisque tous les termes d'ordre supérieurs ou égaux à  $|a|$  ou  $|b|$  sont nuls.

## 4 Equations non linéaires : stabilité

Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$ . On dit que  $x_0 \in U$  est un point d'équilibre, ou point critique, si  $\xi(x_0) = 0$ , auquel cas l'application constante  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\varphi(t) = x_0$  est solution de l'équation différentielle associée au champ  $\xi : \varphi'(t) = 0 = \xi(\varphi(t))$ .

**Définition 4.1** On dit que le point d'équilibre  $x_0$  du champ de vecteurs  $\xi$  est stable si pour tout  $R > 0$  tel que  $\overline{B}(x_0, R) \subset U$  il existe  $r(R)$ , avec  $0 < r(R) \leq R$ , tel que si  $\varphi : I \rightarrow U$  est une solution maximale de l'équation associée au champ  $\xi$  telle que il existe  $t_0 \in I$  avec  $\|\varphi(t_0) - x_0\| \leq r$ , alors  $\|\varphi(t) - x_0\| \leq R$  pour tout  $t \geq t_0$ .

Si c'est le cas, alors il suit du théorème 2.13 que  $I \supset [t_0, +\infty[$ .

On dit que  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable si de plus il existe  $r_0$ , avec  $0 < r_0 \leq R$  tel que si  $\varphi : I \rightarrow U$  est une solution maximale et il existe  $t_0 \in I$  tel que  $\|\varphi(t_0) - x_0\| \leq r_0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t)) = x_0$$

Dans le cas d'un champ de vecteurs linéaire  $\xi(x) = A(x)$  sur  $\mathbb{C}^n$ ,  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ , l'origine est toujours un point d'équilibre :  $\xi(0) = A(0) = 0$ . On déduit immédiatement du théorème 3.23 :

**Théorème 4.2** Soit  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$  et soient  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  les valeurs propres distinctes de  $A$ ,  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  leur multiplicités. Alors :

i) le point critique  $0 \in \mathbb{C}^n$  est asymptotiquement stable  $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, \dots, k$

ii) le point critique  $0 \in \mathbb{C}^n$  est stable  $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, \dots, k$  et si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ , alors l'espace propre associé à  $\lambda_i$  est de dimension  $n_i$ .

*Preuve:* Rappelons que si  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $i = \sqrt{-1}$ , alors  $|e^z| = e^x$ .

Soit  $\varphi(t)$  la solution maximale de condition initiale  $(0, x_0)$ , avec  $x_0 = v_1 + \dots + v_k$ ,  $v_i \in V_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{n_i}$ . D'après 3.23 :

$$\|\varphi(t)\| \leq \sum_{i=1}^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)t} \|P_i(t)\| \quad .$$

Si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i = 1, \dots, k$  cette expression tend vers 0 pour  $t \rightarrow \infty$ , car l'exponentielle domine tout polynôme pour  $t \rightarrow \infty$ ; on a donc stabilité asymptotique. Si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , et  $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow$  l'espace propre associé à  $\lambda_j$  est de dimension égale à la multiplicité de  $\lambda_j$ , alors  $P_j(t) \equiv v_j$ , donc cette expression est bornée par

$$\sum_{i=1}^k \|v_i\|$$

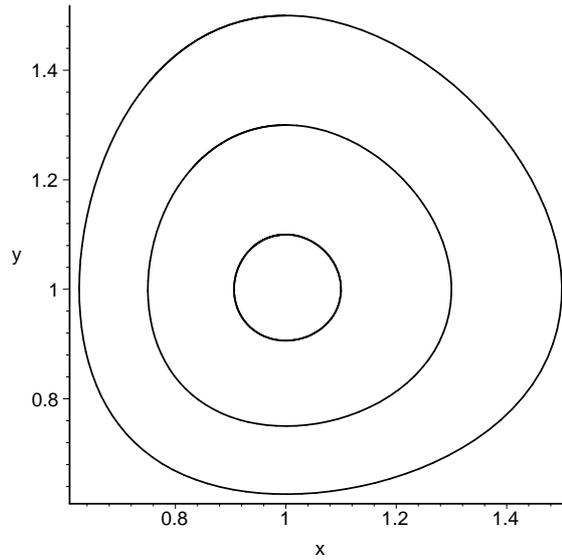


Figure III.9: Trajectoires de l'équation prédateur-proie, avec  $a = b = c = d = 1$

pour  $t$  assez grand et on en déduit que 0 est un point critique stable.

S'il existe  $j$  avec  $\operatorname{Re}(\lambda_j) \geq 0$ , prenons  $v_j \in V_j \setminus \{0\}$ , et soit  $\varphi(t)$  la solution maximale de condition initiale  $(0, v_j)$ . Alors

$$\|\varphi(t)\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} \|P_j(t)\| \geq \|P_j(t)\| \quad , \quad t \geq 0$$

et comme  $v_j \neq 0$ ,  $P_j(t) = v_j + \dots \neq 0$ , ce qui fait que  $\|\varphi_j(t)\|$  ne tend pas vers 0 pour  $t \rightarrow \infty$ , donc on ne peut avoir stabilité asymptotique. Si l'espace propre de  $\lambda_j$  est de dimension strictement inférieure à la multiplicité de  $\lambda_j$ , il existe  $v_j \in V_j$  qui n'est pas vecteur propre, et dans ce cas  $P_j(t) = v_j + t \underbrace{(A - \lambda_j I)(v_j)}_{\neq 0} + \dots$ , ce qui

fait que  $\|\varphi(t)\| \geq \|P_j(t)\| \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow \infty$ , donc on n'a pas stabilité.

*q.e.d.*

Dans le cas  $n = 2$ , on a examiné au § II.1.2 tous les comportements possibles de champs de vecteurs linéaires, qui confirment le théorème ci-dessus.

Un exemple non linéaire est fourni par l'équation de Lotke-Volterra [10], ou équation prédateurs-proies, qui décrit l'évolution de deux espèces d'êtres vivants en cohabitation, l'une (les proies – par exemple des lapins) ayant à disposition autant de nourriture que nécessaire, l'autre (les prédateurs – par exemple des renards) se nourrissant exclusivement de la première espèce. Si  $x(t)$  et  $y(t)$  décrivent le nombre d'individus de la première, respectivement la deuxième espèce, une bonne approximation de l'évolution est décrite par le système d'équations :

$$(4-1) \quad \begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = -y(c - dx) \end{cases} \quad , \quad a, b, c, d > 0 \quad .$$

En effet, en absence de l'autre espèce, la première croîtrait avec un taux positif :  $x' = ax$ ; mais ce taux est diminué proportionnellement au nombre de prédateurs, d'où  $x' = x(a - by)$ . D'autre part, si les prédateurs sont seuls, ils dépérissent avec un taux constant :  $y' = -cy$ ; par contre, en présence des proies ce taux est augmenté proportionnellement à leur nombre, d'où  $y' = y(-c + dx)$ .

Les seules conditions initiales qui ont un sens sont dans le premier cadran. A part  $(0, 0)$ , le seul point critique est  $P = (c/d, a/b)$ . L'équation (4-1) n'admet pas de solution explicite; par contre, elle admet une intégrale première, c'est-à-dire une fonction qui est constante sur les trajectoires. En effet, si  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  est une solution, alors

$$x'(t) = x(t)(a - by(t)) \quad , \quad y'(t) = -y(t)(c - dx(t))$$

$$\Rightarrow \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{x(t)}{c - dx(t)} \frac{a - by(t)}{-y(t)} \Rightarrow \left( \frac{c}{x(t)} - d \right) x'(t) = \left( -\frac{a}{y(t)} + b \right) y'(t)$$

et en intégrant des deux côtés de la dernière égalité on obtient que :

$$c \cdot \log(x(t)) - d \cdot x(t) = -a \cdot \log(y(t)) + b \cdot y(t) + C$$

où  $C$  est une constante qui dépend de la trajectoire. En d'autres termes, la fonction

$$F(x, y) = c \cdot \log(x) - d \cdot x + a \cdot \log(y) - b \cdot y$$

est constante sur les trajectoires. D'autre part, on calcule que  $dF_P = 0$  et que la matrice des deuxièmes dérivées partielles en  $P$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

On peut déduire de là que la fonction  $F$  elle-même, après changement de coordonnées au voisinage de  $P$  de la forme  $x'(x)$ ,  $y'(y)$ , s'écrit :  $-(x' - c/d)^2 - (y' - a/b)^2$ ; on voit ainsi que les ensembles  $F = C$  sont difféomorphes à des cercles concentriques.

Dans les deux paragraphes suivants nous allons établir des méthodes pour examiner la stabilité de points critiques de champs de vecteurs non nécessairement linéaires.

#### 4.1 Méthode directe de Ляпунов (1892)

1

**Définition 4.3** Soit  $x_0 \in U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, avec  $f(x_0) = 0$ . On dit que :

- (1)  $f$  est définie positive (respectivement négative) si  $f(x) > 0$  (respectivement  $f(x) < 0$ )  $\forall x \in U$ ,  $x \neq x_0$
- (2)  $f$  est semi-définie positive (respectivement négative) si  $f(x) \geq 0$   $\forall x \in U$  (respectivement  $f(x) \leq 0$ ).

Soit maintenant  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs, avec  $\xi(x_0) = 0$ . Si  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , on définit une nouvelle fonction  $L_\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée dérivée de  $L$  dans la direction  $\xi$ , par :

$$L_\xi(x) = dL_x(\xi(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i(x) \quad .$$

**Définition 4.4** On dit que  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , est une fonction de Liapounov pour  $\xi$  si  $L(x_0) = 0$  et :

- (1)  $L(x)$  est définie positive
- (2)  $L_\xi(x)$  est semi-définie négative.

Remarquons que si  $L$  est une fonction de Liapounov pour  $\xi$ , et  $\varphi(t)$  une trajectoire de  $\xi$ , alors :

$$(L(\varphi(t)))' = L_\xi(\varphi(t)) \leq 0$$

et donc  $L(\varphi(t))$  est décroissante. Si de plus  $L_\xi(x)$  est définie négative, alors  $L(\varphi(t))$  est strictement décroissante.

**Théorème 4.5 (Théorème de stabilité)** Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs,  $x_0 \in U$ ,  $\xi(x_0) = 0$ , et soit  $L$  une fonction de Liapounov pour  $\xi$ . Alors :

<sup>1</sup>La transcription en caractères latins est généralement "Liapounov", dans les textes en français, et "Lyapunov", dans les textes en anglais

i)  $x_0$  est un point d'équilibre stable de  $\xi$

ii) si de plus  $L_\xi(x)$  est définie négative, alors  $x_0$  est asymptotiquement stable.

*Preuve:* Soit  $R > 0$  tel que  $\overline{B}(x_0, R) \subset U$  et soit  $C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = R\}$ . Posons :

$$m = \inf \{L(x) \mid x \in C_R\}$$

et remarquons que  $m > 0$ . Puisque  $L$  est continue et  $L(x_0) = 0$ , il existe  $r(R)$  tel que

$$\|x - x_0\| \leq r(R) \Rightarrow L(x) < m \quad .$$

Si  $\varphi(t)$  est une trajectoire de  $\xi$ , et  $\|\varphi(t_0) - x_0\| \leq r(R)$ , alors  $L(\varphi(t_0)) < m$ , et donc  $L(\varphi(t)) \leq L(\varphi(t_0)) < m$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Donc  $\varphi(t) \notin C_R$  pour  $t \geq t_0$ , et alors  $\|\varphi(t) - x_0\| < R$  pour  $t \geq t_0$ , ce qui montre que  $x_0$  est stable.

Pour ii), montrons d'abord que  $L(\varphi(t)) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow \infty$ . Puisque  $L(\varphi(t)) \geq 0$  décroît, on peut poser  $\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} L(\varphi(t))$ . Si  $\ell > 0$ , soit  $r' \leq r$ ,  $r' \geq 0$ , tel que  $\|x - x_0\| \leq r' \Rightarrow L(x) < \ell$ ; alors  $r' \leq \|\varphi(t) - x_0\| \leq R$  pour  $t \geq t_0$ . Soit :

$$\mu = -\sup \{L_\xi(x) \mid r' \leq \|x - x_0\| \leq R\}$$

de sorte que  $L_\xi(x) \leq -\mu$  si  $r' \leq \|x - x_0\| \leq R$ . Puisque  $L_\xi(x)$  est définie négative,  $\mu > 0$ . Alors pour  $t \geq t_0$  :

$$L(\varphi(t)) = L(\varphi(t_0)) + \int_{t_0}^t \underbrace{L_\xi(\varphi(s))}_{\leq -\mu} ds \leq L(\varphi(t_0)) - \mu(t - t_0)$$

mais  $L(\varphi(t_0)) - \mu(t - t_0) < 0$  pour  $t$  assez grand, ce qui contredit que  $L$  est définie positive. Montrons enfin que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(\varphi(t)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0 \quad .$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et posons

$$m_\varepsilon = \inf \{L(x) \mid \varepsilon \leq \|x - x_0\| \leq R\} \quad ;$$

puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\varphi(t)) = 0$ , il existe  $T_\varepsilon \geq t_0$  tel que

$$t \geq T_\varepsilon \Rightarrow L(\varphi(t)) < m_\varepsilon \quad .$$

Or  $\varphi(t) \in \{x \mid \|x - x_0\| < R\}$  et si  $t \geq T_\varepsilon$ ,  $L(\varphi(t)) < m_\varepsilon \Rightarrow \varphi(t) \notin \{x \mid \varepsilon \leq \|x - x_0\| \leq R\}$ , et donc  $\varphi(t) \in \{x \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ .

*q.e.d.*

Dans la même veine, on a le

**Théorème 4.6 (Théorème d'instabilité)** Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs,  $x_0 \in U$ ,  $\xi(x_0) = 0$ , et soit  $L$  une fonction de classe  $C^1$ , avec  $L(x_0) = 0$ . Supposons que :

i) pour tout  $r > 0$  il existe  $x_r \in U$  avec  $\|x_r - x_0\| \leq r$  et  $L(x_r) > 0$

ii)  $L_\xi(x)$  est définie positive dans un voisinage de  $x_0$ .

Alors le point d'équilibre  $x_0$  n'est pas stable.

*Preuve:* La démonstration est semblable à celle de 4.5.

On va montrer que si  $R_0 > 0$  est tel que  $\overline{B}(x_0, R_0) \subset U$ , alors quel que soit  $r \leq R_0$ , il existe une solution maximale  $\varphi(t)$ , avec  $\varphi(t_0) \in B(x_0, r)$ , mais  $\varphi(t) \notin \overline{B}(x_0, R_0)$  pour  $t$  assez grand.

En effet, pour tout  $r \leq R_0$ , par hypothèse on peut trouver  $x_r \in \overline{B}(x_0, r)$  avec  $L(x_r) > 0$ . Soit  $\varphi(t)$  une solution maximale avec  $\varphi(0) = x_r$ ; si elle reste dans la boule  $\overline{B}(x_0, R_0)$  pour  $t > 0$ , cette solution est définie pour tout  $t \geq 0$  et alors :

$$(4-2) \quad L(\varphi(t)) - L(\varphi(0)) = \int_0^t L_\xi(\varphi(s)) ds > 0$$

ce qui entraîne qu'il existe  $\rho > 0$  tel que  $\|\varphi(t)\| \geq \rho, \forall t \geq 0$ , sans quoi on contredirait (4-2), et  $\rho \leq r$ . Posons alors :

$$m = \inf \{L_\xi \mid \rho \leq \|x - x_0\| \leq r\}$$

et remarquons que  $m > 0$ . Mais alors :

$$L(\varphi(t)) - L(\varphi(0)) = \int_0^t L_\xi(\varphi(s)) ds \geq m \cdot t$$

et donc  $L(\varphi(t))$  n'est pas bornée, donc  $\varphi(t)$  non plus.

*q.e.d.*

### Exemples 4.7

- (1) Soit  $\xi(x, y) = (-y - x^3, x - y^3)$ ,  $x_0 = (0, 0)$ . Posons  $L(x, y) = x^2 + y^2$ ; alors  $L_\xi(x, y) = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4)$ . Puisque  $L$  est définie positive et  $L_\xi$  est définie négative,  $(0, 0)$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- (2) Soit  $\xi = (x + x^3, -y - y^3)$ ,  $x_0 = (0, 0)$ . Posons  $L(x, y) = x^2 - y^2$ . Alors  $L_\xi(x, y) = 2x(x + x^3) - 2y(-y - y^3) = 2(x^2 + y^2 + x^4 + y^4)$  est définie positive, et  $L(R, 0) > 0$  pour tout  $R > 0$ ,  $x_0$  n'est donc pas stable.
- (3) Si  $F$  désigne l'intégrale première de l'équation de Lotke-Volterra que l'on a trouvée à la fin du § précédent, la fonction  $L(x, y) = -F(x, y) + F(P)$ , où  $P = (c/d, a/b)$  est le point critique étudié, peut être considérée comme fonction de Liapounov. En effet, le calcul que l'on a fait des dérivées deuxièmes de  $F$  montre que  $F$  possède un maximum local strict en  $P$ , et il en résulte que  $L$  est définie positive sur un voisinage de  $P$ . D'autre part, puisque  $F$  est une intégrale première, on a que  $L_\xi = 0$ .

## 4.2 Etudes de la stabilité des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par linéarisation

Si  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un champ  $C^\infty$  et  $x_0$  un point d'équilibre, alors  $\xi(x) = d\xi_{x_0}(x - x_0) + r(x - x_0)$ , avec  $\lim_{h \rightarrow 0} (r(h)/\|h\|) = 0$ .  $d\xi_{x_0}$  peut être vu comme un champ linéaire, qui approche  $\xi$  au voisinage de  $x_0$ ; on l'appelle partie linéaire du champ  $\xi$  en  $x_0$ . Le prochain théorème nous dit que dans certains cas la nature d'un point d'équilibre  $x_0$  d'un champ de vecteurs  $\xi$  est la même que celle de sa partie linéaire en  $x_0$ .

**Théorème 4.8** Soit  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  et  $x_0 \in U$  un point d'équilibre. Soit  $A \in M(2, 2, \mathbb{R})$  la matrice de la partie linéaire  $d\xi_{x_0}$  de  $\xi$  en  $x_0$ . Alors :

- (1) si les parties réelles des valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives,  $x_0$  est asymptotiquement stable
- (2) s'il existe une valeur propre dont la partie réelle est strictement positive  $x_0$  n'est pas stable.

Nous démontrerons seulement l'affirmation (1) de ce théorème; la preuve de (2) est semblable.

D'abord il nous faut établir 2 lemmes.

On notera par  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$  le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^2$  et par  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  la norme associée. Soit  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique; on dit qu'elle est définie négative si  $q(x) < 0 \forall x \neq 0$ .

**Lemme 4.9** Soit  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique définie négative. Alors il existe  $\gamma < 0$  tel que :

$$q(x_1, x_2) \leq \gamma(x_1^2 + x_2^2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

*Preuve:* Puisque  $q$  est une forme quadratique,  $q(\alpha \cdot x) = \alpha^2 \cdot q(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ . On pose

$$\gamma = \sup \{q(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

et alors  $q(x) = \|x\|^2 q(x/\|x\|) \leq \gamma \cdot \|x\|^2$ .

*q.e.d.*

**Lemme 4.10** Soit  $A$  une matrice de l'une des formes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}, \mu < 0 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda < 0, 0 < a < -2\lambda \quad .$$

Alors la forme quadratique  $q(x) = \langle x, A(x) \rangle$  est définie négative.

*Preuve:* Soit  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \neq 0$ . Dans le 1er cas,  $\langle x, A(x) \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 < 0$ .

Dans le 2ème,  $q(x) = \mu(x_1^2 + x_2^2) < 0$ .

Dans le 3ème :

$$q(x) = \lambda(x_1^2 + x_2^2) + ax_1x_2 = \lambda \left( x_1 + \frac{a}{2\lambda}x_2 \right)^2 - \lambda \left( \frac{a}{2\lambda} \right)^2 x_2^2 + \lambda x_2^2 = \lambda \left( x_1 + \frac{a}{2\lambda}x_2 \right)^2 + \lambda \underbrace{\left( 1 - \left( \frac{a}{2\lambda} \right)^2 \right)}_{>0} x_2^2$$

*q.e.d.*

Notons, comme on l'a déjà vu dans la preuve de **4.5**, qu'une matrice de la forme  $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , avec  $b \neq 0$ , peut toujours être mise sous la forme  $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $b'$  quelconque non nul, par un changement de coordonnées de la forme  $e'_2 = \frac{b'}{b}e_2$ ; on peut donc toujours s'arranger ainsi pour satisfaire la condition  $0 < a < -2\lambda$  dans le troisième cas du lemme précédent.

*Preuve de 4.8*

Quitte à faire une translation, on peut supposer que  $x_0 = 0$ ; d'après **1.5**, après un changement de base de  $\mathbb{R}^2$ , on peut supposer que  $A$  est de l'une des trois formes du lemme **4.10**. Il existe donc  $\gamma < 0$  tel que

$$\langle x, A(x) \rangle \leq \gamma(x_1^2 + x_2^2) \quad .$$

On a que  $\xi(x) = A(x) + r(x)$ , avec  $\|r(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$  si  $\|x\| \leq \delta_\varepsilon$ . Posons  $L(x) = \langle x, x \rangle$ . Alors

$$L_\xi(x) = L_A(x) + L_r(x) = 2\langle x, A(x) \rangle + 2\langle x, r(x) \rangle$$

et d'après **4.9**

$$L_A(x) = 2\langle x, A(x) \rangle \leq 2\gamma \|x\|^2 \quad , \quad \gamma < 0 \quad .$$

D'autre part :

$$|L_r(x)| = |2\langle x, r(x) \rangle| \leq 2 \|x\| \|r(x)\| \leq -\gamma \|x\|^2 \quad \text{pour} \quad \|x\| < \delta_{-\gamma/2} \quad ;$$

Donc si  $\|x\| \leq \delta_{-\gamma/2}$ , alors  $L_\xi(x) = L_A(x) + L_r(x) \leq \gamma \|x\|^2$ ; donc  $L_\xi(x)$  est définie négative et on peut appliquer **4.5**.

*q.e.d.*

### Exemples 4.11

(1) Soit  $\xi = (xy + y, x + xy)$ . Les points critiques sont  $P = (0, 0)$  et  $Q = (-1, -1)$ . D'autre part :

$$d\xi(x, y) = \begin{pmatrix} y & x+1 \\ 1+y & x \end{pmatrix} \quad , \quad d\xi_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad d\xi_Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque les valeurs propres de  $d\xi_Q$  sont négatives, ce point critique est stable. Par contre les valeurs propres de  $d\xi_P$  sont  $+1$  et  $-1$ , donc  $P$  n'est pas stable.

(2) Soit  $\xi(x, y) = (-y + x^3, x + y^3)$ . Ici, le seul point critique est  $(0, 0)$ ; la partie linéaire de  $\xi$  en ce point est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et son polynôme caractéristique  $\lambda^2 + 1$ . Les parties réelles des valeurs propres sont donc nulles, et le théorème **4.3** ne permet pas de conclure. En fait, si on pose  $L(x, y) = x^2 + y^2$ , on voit que  $L_\xi(x, y) = 2(x^4 + y^4)$ ; puisque  $L$  est définie positive, ainsi que  $L_\xi$ , le théorème **4.6** permet de conclure que  $(0, 0)$  n'est pas un point critique stable.

Il faut remarquer que ce champ de vecteur a la même partie linéaire en  $(0, 0)$  que le champ de l'exemple **4.7(1)**, dont on a montré que  $(0, 0)$  est un point critique asymptotiquement stable. On voit donc que la partie linéaire ne permet pas de conclure lorsque les parties réelles des valeurs propres sont nulles; par contre la méthode directe de Liapounov permet de conclure (dans ce cas au moins).

### 4.3 Stabilité structurelle

Une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  est une application  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$  est un ouvert. On note  $(x, v) \in \Omega$  un point de  $\Omega$ , avec  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $v \in \mathbb{R}^k$ .  $v$  joue le rôle d'un paramètre : pour tout  $v$  fixé,  $x \mapsto \xi(x, v)$  est un champ de vecteurs, que l'on notera  $\xi_v$ , sur l'ouvert  $\Omega \cap (\mathbb{R}^2 \times \{v\})$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Une famille de champs de vecteurs peut être vue comme déformation du champ  $\xi_{v_0}$  obtenu en fixant une valeur  $v_0$  du paramètre. En général, on parle de "stabilité structurelle" d'une propriété d'un être mathématique lorsque cette propriété subsiste après de petites déformations. Le prochain théorème donne une condition suffisante pour que le point d'équilibre d'un champ de vecteurs soit structurellement stable.

**Théorème 4.12 (Stabilité structurelle)** *Soit  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$  ouvert, une famille  $C^\infty$  de champs de vecteurs. Soit  $(x_0, v_0) \in \Omega$  tel que  $\xi(x_0, v_0) = 0$  et supposons que les valeurs propres de  $A = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_0, v_0)$  soient toutes à partie réelle strictement négative. Alors il existe  $r_0 > 0$  et  $R_0 > 0$  tels que  $B(x_0, R_0) \times B(v_0, r_0) \subset \Omega$  et une application continue  $\chi : B(v_0, r_0) \rightarrow B(x_0, R_0)$  telle que :*

(1)  $\forall x \in B(x_0, R_0), v \in B(v_0, r_0)$  on a :

$$\xi(x, v) = 0 \iff x = \chi(v)$$

(2)  $\chi(v)$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable de  $\xi_v, \forall v \in B(v_0, r_0)$ .

*Preuve:* L'hypothèse entraîne en particulier que les valeurs propres de  $A$  ne peuvent pas être nulles et donc que  $A$  est inversible. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites **II.2.2** à l'équation  $\xi(x, v) = 0$  au voisinage de  $(x_0, v_0)$ . On en déduit l'existence de  $r_0, R_0$  et  $\chi$  vérifiant la propriété (1) de l'énoncé. De plus, quitte à prendre  $r_0$  et  $R_0$  suffisamment petits, les valeurs propres de  $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, v)$  vont encore avoir des parties réelles strictement négatives, et donc  $\chi(v)$  sera un point d'équilibre asymptotiquement stable de  $\xi_v$  pour  $v \in B(v_0, r_0)$ .

*q. e. d.*

On termine par un exemple de famille de champs de vecteurs qui n'est pas structurellement stable.

### La bifurcation de Hopf

Considérons la famille de champ de vecteurs :

$$(4-3) \quad x' = -y + x(\varepsilon - x^2 - y^2)$$

$$(4-4) \quad y' = x + y(\varepsilon - x^2 - y^2)$$

où  $\varepsilon$  joue le rôle d'un paramètre, que l'on prendra proche de 0.

Passons en coordonnées polaires; on cherche  $\rho'$  et  $\theta'$  tels que :

$$(I) \quad \rho' \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)\theta' = -\rho \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)(\varepsilon - \rho^2)$$

$$(II) \quad \rho' \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)\theta' = \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta)(\varepsilon - \rho^2)$$

et en calculant  $\cos(\theta)$  (I) +  $\sin(\theta)$  (II) et  $\sin(\theta)$  (I) -  $\cos(\theta)$  (II) on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho(\varepsilon - \rho^2) \\ \rho\theta' &= \rho \end{aligned}$$

Une première solution est la constante  $\rho = 0$ . Pour les autres solutions, on peut supposer  $\rho \neq 0$ , et donc simplifier par  $\rho$  dans la deuxième équation du système précédent :

$$(4-5) \quad \rho' = \rho(\varepsilon - \rho^2)$$

$$(4-6) \quad \theta' = 1$$

En prenant des conditions initiales avec  $t_0 = 0$  on en tire que  $\theta(t) = t + \theta_0$ .

Pour déterminer  $\rho$ , on voit d'abord que si  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho = \sqrt{\varepsilon}$  est une solution. Si  $\rho_0 \neq \sqrt{\varepsilon}$ , on peut résoudre (4-2) en intégrant par rapport au temps de 0 à  $t$ . Si  $\varepsilon = 0$  on trouve:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} -\frac{1}{r^3} dr = \frac{1}{2r^2} \Big|_{\rho_0}^{\rho} = t$$

d'où l'on tire que

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\rho_0^2} + 2t}} \quad , \quad t > -\frac{1}{2\rho_0^2}$$

Si  $\varepsilon \neq 0$  il suit de (4-2) que :

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{r(\varepsilon - r^2)} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\rho_0}^{\rho} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varepsilon - r^2} \right) d(r^2) = \frac{1}{2\varepsilon} \log \left( \frac{r^2}{|\varepsilon - r^2|} \right) \Big|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{1}{2\varepsilon} \log \left( \frac{\rho^2}{\varepsilon - \rho^2} \frac{\varepsilon - \rho_0^2}{\rho_0^2} \right) = t$$

d'où l'on tire que

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + e^{-2\varepsilon t} \left( \frac{\varepsilon}{\rho_0^2} - 1 \right)}} \quad .$$

Pour comprendre l'allure des solutions, il faut distinguer plusieurs cas.

- Si  $\rho_0^2 < \varepsilon$  (et donc  $\varepsilon > 0$ ),  $\rho(t)$  est défini pour tout  $t$  et

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \quad , \quad t \rightarrow -\infty \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

- Si  $\rho_0^2 > \varepsilon \neq 0$ , on pose

$$t_- = \frac{1}{2\varepsilon} \log \left( \frac{\rho_0^2 - \varepsilon}{\rho_0^2} \right)$$

de sorte que

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 - e^{-2\varepsilon(t-t_-)}}}$$

et  $\rho(t)$  est défini pour  $t > t_-$ .

- Si  $\varepsilon > 0$  :

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \quad , \quad t \rightarrow t_- \Rightarrow \rho \rightarrow +\infty$$

- Si  $\varepsilon < 0$  :

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho \rightarrow 0 \quad , \quad t \rightarrow t_- \Rightarrow \rho \rightarrow +\infty$$

Ainsi, lorsque  $\varepsilon$  passe de valeurs négatives à des valeurs positives on voit apparaître une trajectoire périodique (le cercle de rayon  $\sqrt{\varepsilon}$ ).

Il suit du fait que  $\theta = \theta_0 + t$  que l'on obtient les autres solutions par rotation autour de l'origine de celles qui ont été esquissées. Les droites en pointillé représentent des asymptotes obliques. Notons que pour  $\varepsilon \neq 0$ , lorsque  $t$  tend vers une des extrémités de son intervalle de définition ( $-\infty$ ,  $t_-$  ou  $+\infty$ ),  $\rho(t)$  tend exponentiellement vers sa limite (que ce soit 0,  $\sqrt{\varepsilon}$  ou  $+\infty$ ), alors que pour  $\varepsilon = 0$ , lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\rho(t)$  tend vers 0 comme  $1/\sqrt{t}$ , ce qui est beaucoup plus lent. Cela se voit les figures.

Puisque lorsque  $\varepsilon$  passe de valeurs négatives à des valeurs positives, on voit apparaître une orbite périodique, on n'a pas de stabilité structurelle au voisinage de  $\varepsilon = 0$  : on parle alors de bifurcation, parce qu'il y a un changement qualitatif de l'allure des trajectoires.

Notons que si on pose  $\xi_\varepsilon = (-y + x(\varepsilon - x^2 - y^2), x + y(\varepsilon - x^2 - y^2))$ , la partie linéaire de  $\xi_\varepsilon$  en  $0 \in \mathbb{R}^2$  vaut :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}^{(0,\varepsilon)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est  $(\lambda - \varepsilon)^2 + 1$ , ses valeurs propres sont donc  $\varepsilon \pm \sqrt{-1}$ ; elles traversent l'axe imaginaire lorsque  $\varepsilon$  passe de valeurs négatives à des valeurs positives.

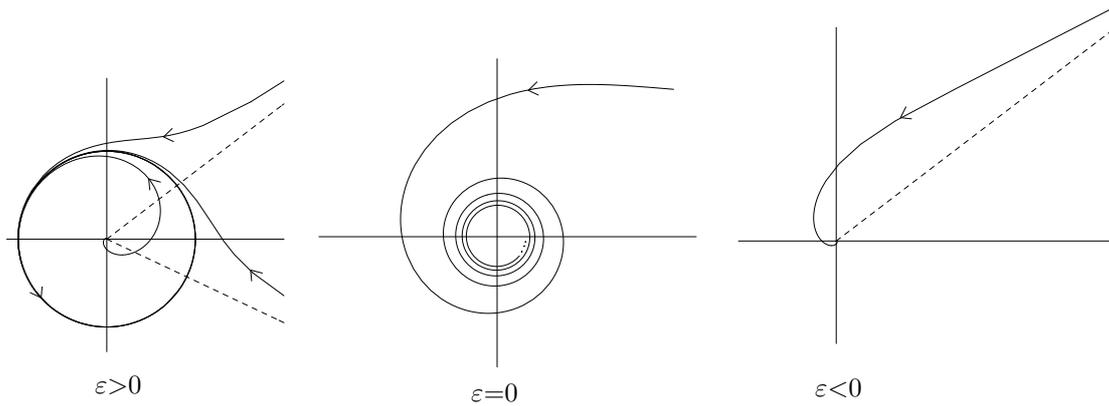


Figure III.10: La bifurcation de Hopf

Pour  $\varepsilon = 0$ , les trajectoires de la partie linéaire sont les cercles centrés à l'origine, alors que pour le champs lui-même ce sont des spirales qui tendent lentement vers l'origine.

Pour  $\varepsilon < 0$ , les parties réelles des valeurs propres de la partie linéaire sont négatives, donc l'origine est un attracteur, et les trajectoires tendent rapidement vers l'origine.

Pour  $\varepsilon > 0$ , les parties réelles des valeurs propres de la partie linéaire sont positives, donc l'origine est un répulseur. Mais le cercle de rayon  $\sqrt{\varepsilon}$  est un cycle attracteur : les trajectoires de l'extérieur et de l'intérieur du cercle s'approchent très rapidement en spiralant vers ce cercle.

En conclusion, lorsqu'on passe de  $\varepsilon < 0$  à  $\varepsilon > 0$ , l'origine est d'abord un attracteur, qui s'affaiblit lorsque  $\varepsilon = 0$ , puis engendre un cercle attracteur de rayon  $\sqrt{\varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon > 0$ . Ce type de phénomène, appelé bifurcation de Hopf, a été étudié par Eberhardt Hopf en 1942. (L'article original de E. Hopf a paru dans une revue peu diffusée. On en trouve une traduction en anglais dans [6].) Un théorème de E. Hopf affirme, en gros, que le phénomène de l'apparition d'un cycle attracteur proche d'un cercle de rayon  $\sqrt{\varepsilon}$  se produit chaque fois que l'on a une famille de champs de vecteurs  $\xi_\varepsilon(x, y)$ , telle que  $\xi_\varepsilon(0, 0) = 0$ , l'origine est un attracteur "faible" pour  $\xi_0$ , et que les parties réelles des valeurs propres de la partie linéaire de  $\xi_\varepsilon$  traversent l'axe imaginaire pour  $\varepsilon = 0$ .

## 5 Exercices

### A Généralités, variables séparées, changement de coordonnées

1 Résoudre l'équation

$$y' = y^2 \cos(t)$$

et esquisser la famille des solutions.

2 Trouver les solutions de l'équation différentielle  $y't^3 - 2y = 0$ . Montrer que pour toute condition initiale  $(t_0, y_0)$ , avec  $t_0 \neq 0$ , il passe une infinité de solutions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

3 On cherche une fonction holomorphe  $w(z)$  satisfaisant l'équation différentielle :

$$w'(z) = \frac{1}{2w(z)}$$

Montrer qu'il existe une infinité de solutions maximales avec condition initiale  $w(1) = 1$ .

4 Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

en passant en coordonnées polaires et esquisser les trajectoires.

**5** Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = -x + x^2 - y^2 \\ y' = -y + 2xy \end{cases}$$

et décrire les trajectoires.

(*Indication* : il s'agit en fait de l'équation associée au champ de vecteurs qui s'écrit sous la forme  $\xi = z(z-1)$ , où  $z = x + iy$ . Utiliser la transformation  $h(z) = \frac{z}{z-1}$  pour se ramener à l'équation associée au champ  $\eta(x, y) = (-x, -y)$ ).

**6** Trouver les solutions des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

en mettant sous forme de Jordan les matrices correspondantes.

**7** Décrire l'allure des solutions des systèmes suivants, sans résoudre explicitement :

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 5y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

## B Problème aux limites

**8** Soit  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $A, B$  deux nombres réels. On cherche une fonction  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait les conditions :

$$y'' = f(t, y) \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

Montrer que ce problème se ramène à résoudre l'équation intégrale :

$$y(t) = \frac{b-t}{b-a}A + \frac{t-a}{b-a}B + \int_a^b G(t, s)f(s, y(s))ds$$

où :

$$G(s, t) = \begin{cases} \frac{(b-s)(a-t)}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq s \leq b \\ \frac{(b-t)(a-s)}{b-a} & \text{si } a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

A l'aide du théorème du point fixe, montrer que si  $f$  satisfait la condition de Lipschitz :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad , \quad \forall t \in [a, b], y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

avec  $L(b-a)^2 < 8$ , alors le problème possède une et une seule solution.

**9** Trouver pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  le problème aux limites suivant possède une et une seule solution :

$$y'' + y = 0 \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

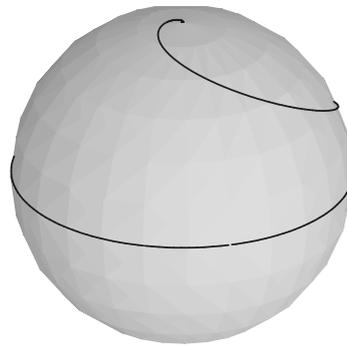
### C Champs tangents à une sous-variété

**10** Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété,  $U \supset X$  un ouvert et  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs tangent à  $X$ , c'est-à-dire tel que :

$$y \in X \implies \xi(y) \in TX_y$$

où  $TX_y$  désigne l'espace tangent à  $X$  au point  $y$ . Montrer que si  $\varphi : I \rightarrow U$  est une trajectoire de  $\xi$ , et que  $\varphi(t_0) \in X$  pour un  $t_0 \in I$ , alors  $\varphi(t) \in X$  pour tout  $t \in I$  (utiliser les équations locales de  $X$ ). Montrer que si  $X$  est compacte, les trajectoires maximales de  $\xi$  sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**11** Montrer que le champ  $\xi = (-y + xz^2, x + yz^2, -z(x^2 + y^2))$  est tangent à la sphère. Esquisser ses trajectoires (On pourra utiliser la transformation  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \sqrt{1 - \rho^2})$  pour se ramener à un champ dans le plan).



### D Méthode de la variation des constantes

**12** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Trouver un système fondamental de solutions de l'équation homogène  $y' = A(y)$  et en déduire une solution particulière de l'équation inhomogène  $y' = A(y) + b(t)$ . Trouver la solution qui a pour conditions initiales  $t_0 = 0, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**13** Trouver les solutions :

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}, \quad y'' + 4y = 3 \sin(x), \quad y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$$

### E Equations à point singulier régulier

**14** (Equations d'Euler) Trouver les solutions :

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \quad t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0, \quad t^2 y'' + ty' + y = 0$$

**15** Montrer que l'origine est un point singulier régulier et calculer 2 solutions indépendantes :

$$4ty'' + 2y' + y = 0$$

## F Fonction hypergéométrique

**16**  $F(a, b, c, t)$  désigne la fonction hypergéométrique. On rappelle que :

$$F(a, b, c, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)b(b+1) \cdots (b+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)} t^k .$$

Montrer que :

$$F(-p, b, b, -x) = (1+x)^p \quad (p \text{ entier } > 0) \quad , \quad \log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x) .$$

## G Exponentielles de matrices et systèmes linéaires à coefficients constants

**17** Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

**18** Résoudre  $y' = A(y)$  en calculant  $e^{tA}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

**19** Résoudre les équations  $y' = A(y)$  en calculant l'exponentielle, dans les 2 cas suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$$

Dans le cas b), écrire  $A = \mu \cdot I + \alpha \cdot J$ , où  $I$  est la matrice identité et  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Observer que  $J^2 = -I$  et calculer l'exponentielle de  $(t - t_0) \cdot J$  à partir de la série qui la définit.

**20** Soit  $A \in M(2, 2, \mathbb{C})$ . Montrer que

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) \quad , \quad \text{où } \text{Tr}((a_{i,j})) = a_{1,1} + a_{2,2}$$

Indication: traiter d'abord le cas où  $A$  est diagonalisable, puis ramener à ce cas le cas général par passage à la limite.

**21** Soient  $\text{Asym}(n) = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\}$  (matrices antisymétriques). Montrer que l'application

$$\varphi : \text{Asym}(n) \rightarrow M(n, n, \mathbb{R}) \quad , \quad \varphi(A) = e^A$$

est une paramétrisation locale du groupe orthogonal  $\mathcal{O}(n) = \{R \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid R^t R = I\}$  au voisinage de  $I = \text{identité}$ .

## H Stabilité : méthode directe de Liapounov, linéarisation, stabilité structurelle

**22** Dire quelle est la nature du point critique  $(0, 0)$ , soit à l'aide d'une fonction de la forme  $x^2 + ay^2$  (où  $a$  peut être positif ou négatif), soit par linéarisation :

$$\xi = (-2xy^2 - x^3, -y + x^2y) \quad , \quad \xi = (2xy + x^3, -x^2 + y^3) \quad , \quad \xi = (x^3 + y^2, x^2 - y^3)$$

$$\xi = -(xy^2 + 2\sin(y), x - x^2y - \sin(y)) \quad , \quad \xi = (y - \sin(x)^3, -4x - \sin(y)^3) \quad , \quad \xi = (e^y - 1, -\sin(x) - y)$$

**23** L'équation du mouvement du pendule s'écrit :

$$\ddot{x} + k \sin(x) = 0$$

où  $x$  représente l'angle du bras du pendule avec la verticale et  $k$  est une constante positive. En posant  $y = \dot{x}$  cette équation est équivalente au système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k \sin(x) \end{cases}$$

Etudier les points critiques de ce système et leur stabilité. (Indication: en  $(0, 0)$ , on peut utiliser la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, qui est constante sur les trajectoires; en  $(\pm\pi, 0)$ , on peut regarder la partie linéaire de l'équation).

**24** L'équation du mouvement du pendule avec friction s'écrit :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k \sin(x) = 0$$

où  $c$  est une nouvelle constante positive. Ramener, en posant  $y = \dot{x}$ , à un système de deux équations d'ordre 1. Etudier la nature des points critiques par linéarisation. En déduire que l'équation étudiée dans l'exercice précédent n'est pas structurellement stable.

**25** Trouver les points singuliers du champ de vecteurs suivant et étudier leur stabilité par linéarisation :

$$\xi(x, y) = (x^2 - y^2, x * y - 1)$$

**26** (Modèle pour la bifurcation de Hopf) Etudier les trajectoires de la famille de champs de vecteurs :

$$\xi_\varepsilon = (-y + x(\varepsilon - x^2 - y^2), x + y(\varepsilon - x^2 - y^2))$$

a) Etude à priori :

- Montrer que la famille des trajectoires est invariante par rotation (indication: si  $R$  est une rotation, montrer que  $\xi_\varepsilon(R(P)) = R(\xi_\varepsilon(P))$ ,  $P \in \mathbb{R}^2$ ).
- Etudier la nature du point critique  $(0, 0)$ , par linéarisation si  $\varepsilon \neq 0$ , à l'aide de la méthode directe de Liapounov si  $\varepsilon = 0$
- Montrer que si  $\varepsilon > 0$ , le cercle  $x^2 + y^2 = \varepsilon$  est une trajectoire.

b) Par résolution explicite en passant en coordonnées polaires. On peut ensuite résoudre par séparation des variables.



# Chapitre IV

## Formes différentielles

*Sommaire.* Le théorème fondamental du calcul intégral dit que l'intégrale d'une fonction  $f(x)$  sur un intervalle  $[a, b]$  est égale à la variation d'une primitive  $F(x)$  de  $f(x)$  sur le bord de l'intervalle :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad , \quad \text{où} \quad F'(x) = f(x) \quad .$$

C'est en fait le cas particulier de la dimension 1 du théorème de Stokes, qui, exprimé en termes très vagues, permet de comparer ce qui se passe sur le bord d'un objet de dimension  $k$  et à son intérieur. Par exemple, le théorème de Stokes nous permettra de montrer qu'il n'existe pas d'application continue du disque sur son bord, qui est l'identité sur le bord; de là on déduit le théorème du point fixe de Brouwer, qui affirme (en dimension 2) que toute application continue du disque dans lui-même admet un point fixe. On en déduira le théorème d'existence de point d'équilibre, obtenu en 1949 par John Nash, qui lui a valu le prix Nobel en économie en 1994.

### 1 Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1** On dit que l'application

$$\alpha : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{r\text{-fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une  $r$ -forme alternée si elle est linéaire par rapport à chaque facteur  $E$ , c'est-à-dire:

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v'_i + \mu v''_i, v_{i+1}, \dots, v_r) = \lambda \cdot \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_r) + \mu \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v''_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \\ \forall v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v''_i, v_{i+1}, \dots, v_r \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad .$$

On dit qu'une  $r$ -forme  $\alpha$  sur  $E$  est *alternée*, si elle change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs :

$$\forall v_i, v_j \in E, \quad 1 \leq i < j \leq r : \\ \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots)$$

On désignera par  $L^r(E)$  l'espace vectoriel des  $r$ -formes et par  $\Lambda^r(E)$  l'espace vectoriel des  $r$ -formes alternées.

Lorsque  $r = 1$ , on parle simplement de formes linéaires (la condition d'être alternée est toujours satisfaite, trivialement) .

On pose  $\Lambda^0(E) = L^0(E) = \mathbb{R}$ : les 0-formes se réduisent aux constantes.

#### Exemples 1.2

- (1) Soit  $E = \mathbb{R}^n$ . Alors, si  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , soit  $\det(v_1, \dots, v_n)$  le déterminant de  $n \times n$  matrice ayant  $v_1, \dots, v_n$  comme vecteurs colonne. C'est une  $n$ -forme alternée sur  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Plus généralement, si  $0 < r \leq n$ , et on a une suite  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ , on peut définir une  $r$ -forme alternée  $\alpha_{i_1, \dots, i_r}$  en associant à  $r$  vecteurs  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$  le  $r \times r$  mineur de la matrice ayant  $v_1, \dots, v_r$  obtenu en choisissant les  $r$  lignes correspondantes à  $i_1, \dots, i_r$  :

$$\alpha_{i_1, \dots, i_r}(v_1, \dots, v_r) = \det\left((v_{i_h, \ell})_{h, \ell=1, \dots, r}\right)$$

Nous verrons (théorème 1.9) que ces  $r$ -formes sont en fait une base de l'espace vectoriel  $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ .

Désignons par  $\Sigma_r$  le groupe des permutations de  $\{1, \dots, r\}$ , c'est-à-dire le groupe des bijections de cet ensemble; on commence par quelques rappels sur les permutations. On appelle transposition une permutation qui échange deux éléments de  $\{1, \dots, r\}$ , en laissant tous les autres fixes. Toute permutation  $\sigma$  peut s'écrire comme composition de transpositions :  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ . La signature  $\varepsilon_\sigma$  de la permutation  $\sigma$  est  $(-1)^k$ ; car si la décomposition d'une permutation comme produit de transpositions n'est pas unique, on montre que la parité du nombre  $k$  de transpositions nécessaire lui ne dépend que de  $\sigma$ . Si  $k$  est pair, on dit que la permutation  $\sigma$  est paire, sinon on dit qu'elle est impaire.

**Proposition 1.3** Soit  $\alpha$  une  $r$ -forme sur l'espace vectoriel  $E$ . Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

i) la  $r$ -forme  $\alpha$  est alternée

ii) pour toute permutation  $\sigma \in \Sigma_r$  et tout  $v_1, \dots, v_r \in E$  on a :

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma \cdot \alpha(v_1, \dots, v_r)$$

iii) pour tout  $v_1, \dots, v_r \in E$ , s'il existe  $i \neq j$  tels que  $v_i = v_j$ , alors  $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$ .

iv) si  $v_1, \dots, v_r$  sont linéairement dépendants, alors  $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$ .

*Preuve:* La définition même de forme alternée revient à dire que si  $\tau \in \Sigma_r$  est une transposition, ce qui fait que  $\varepsilon_\tau = -1$ , alors :

$$\alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) = \varepsilon_\tau \cdot \alpha(v_1, \dots, v_r)$$

et donc ii) entraîne i). Si on écrit  $\sigma \in \Sigma_r$  comme produit de transpositions :  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ , alors il suit de i) :

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = (-1)^k \cdot \alpha(v_1, \dots, v_r)$$

et puisque  $\varepsilon_\sigma = (-1)^k$ , i) entraîne ii).

Si  $\alpha$  est alternée, et  $v_i = v_j$ , pour  $i \neq j$ , alors, en faisant opérer la transposition qui échange  $i$  et  $j$  sur la suite de vecteurs  $v_1, \dots, v_r$ , on voit que :

$$\alpha(v_1, \dots, v_r) = -\alpha(v_1, \dots, v_r) \Rightarrow \alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$$

ce qui montre que i) entraîne iii). D'autre part, si  $\alpha$  vérifie iii), en supposant que  $i < j$ , on a

$$\begin{aligned} & \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i + v_j, v_{j+1}, \dots, v_r) = 0 \\ & = \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_r) + \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_r) + \\ & + \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_r) + \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_i, \dots, v_r) = 0 \\ & = \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_r) + \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_r) = 0 \\ & \Rightarrow \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_r) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_r) \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $\alpha$  est alternée.

La propriété iii) est un cas particulier de iv), car si  $v_i = v_j$ ,  $i \neq j$ , on a la dépendance linéaire  $v_i - v_j = 0$ . Inversément, si  $\alpha$  satisfait iii) et que  $v_1, \dots, v_r$  sont linéairement dépendants, alors il existe  $i$  tel que  $v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot v_j$ , et donc

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot \underbrace{\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_r)}_i = 0$$

*q.e.d.*

**Corollaire 1.4** Si  $r > \dim(E)$ , alors toute  $r$ -forme alternée sur  $E$  est identiquement nulle.

*Preuve:* Cela suit de **1.3** iv).

*q.e.d.*

Nous allons définir une généralisation du symbole de Kronecker.

**Définition 1.5** Soient  $i_1, \dots, i_n$  et  $k_1, \dots, k_n$  deux suites de  $n$  entiers. On pose

$$\delta_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si les indices } i_1, \dots, i_n \text{ sont distincts et } k_1, \dots, k_n \text{ en est une permutation paire} \\ -1 & \text{si les indices } i_1, \dots, i_n \text{ sont distincts et } k_1, \dots, k_n \text{ en est une permutation impaire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 1.6 (Produit extérieur de deux formes alternées)** Soient  $\alpha \in \Lambda^r(E)$  et  $\beta \in \Lambda^s(E)$ . On définit la  $r + s$ -forme  $\alpha \wedge \beta$  par :

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+s}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq r+s}} \delta_{1 \dots r+s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s})$$

On appelle  $\alpha \wedge \beta$  le produit extérieur de  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Remarque 1.7** Si  $\lambda \in \Lambda^0(E) = \mathbb{R}$ , alors  $\lambda \wedge \beta = \lambda \cdot \beta$ .

**Proposition 1.8** Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :

i)  $\alpha \wedge \beta$  est une  $r + s$ -forme alternée

ii) distributivité; si  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^r(E)$  :

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$$

iii) anticommutativité :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{r \cdot s} \beta \wedge \alpha$$

iv) associativité; si  $\gamma \in \Lambda^t(E)$  :

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

ce qui autorise à noter  $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$  pour l'une ou l'autre de ces expressions.

*Preuve:* Remarquons d'abord que si  $h_1, \dots, h_{r+s}$  est une permutation de  $1, \dots, r + s$ , alors

$$\delta_{h_1 \dots h_{r+s}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \delta_{h_1 \dots h_{r+s}}^{1 \dots r+s} \cdot \delta_{1 \dots r+s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_{h_1}, \dots, v_{h_{r+s}}) &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq r+s}} \delta_{h_1 \dots h_{r+s}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) = \\ &= \delta_{h_1 \dots h_{r+s}}^{1 \dots r+s} \cdot \left( \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq r+s}} \delta_{1 \dots r+s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) \right) = \delta_{h_1 \dots h_{r+s}}^{1 \dots r+s} \cdot (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+s}) \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété ii) de la proposition **1.3** est satisfaite, et donc  $\alpha \wedge \beta$  est bien une forme alternée.

La distributivité se vérifie sans difficulté.

L'anticommutativité suit du fait que  $\delta_{1 \dots r+s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = (-1)^{r \cdot s} \cdot \delta_{1 \dots r+s}^{j_1 \dots j_s i_1 \dots i_r}$ .

Vérifions l'associativité

$$\begin{aligned} ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{r+s+t}) &= \sum \delta_{1, \dots, r+s+t}^{h_1 \dots h_{r+s} k_1 \dots k_t} \cdot (\alpha \wedge \beta)(v_{h_1}, \dots, v_{h_{r+s}}) \cdot \gamma(v_{k_1}, \dots, v_{k_t}) \\ &= \sum \underbrace{\delta_{1, \dots, r+s+t}^{h_1 \dots h_{r+s} k_1 \dots k_t} \cdot \delta_{h_1, \dots, h_{r+s}}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}}_{=\delta_{1, \dots, r+s+t}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s k_1 \dots k_t}} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) \cdot \gamma(v_{k_1}, \dots, v_{k_t}) \end{aligned}$$

où il est sous-entendu que  $1 \leq h_1 < \dots < h_{r+s} \leq r+s+t$ , etcetera. On arrive à la même expression si l'on part de  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ .

*q. e. d.*

La dernière formule se généralise sans autre au produit de plusieurs formes alternées :

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \dots \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{r+s+\dots+t}) = \sum \delta_{1, \dots, r+s+\dots+t}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s \dots k_1 \dots k_t} \cdot \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \cdot \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) \cdot \dots \cdot \gamma(v_{k_1}, \dots, v_{k_t})$$

où, afin d'éviter des triples indices, nous indiquons par  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  un certain nombre de formes alternées, d'ordre respectivement  $r, s, \dots, t$ . En particulier, si on a des 1-formes  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ , on a :

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_r)(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_r \\ 1 \leq i_h \leq r}} \delta_{1, \dots, r}^{i_1 \dots i_r} \cdot \varphi_1(v_{i_1}) \cdot \dots \cdot \varphi_r(v_{i_r}) = \det(\varphi_i(v_j))_{i,j=1, \dots, r}$$

**Théorème 1.9** Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  une base de l'espace des formes linéaires de l'espace vectoriel  $E$ . Alors les  $\binom{n}{r}$   $r$ -formes alternées  $\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}$  forment une base de l'espace vectoriel  $\Lambda^r(E)$ .

*Preuve:* Désignons par  $e_1, \dots, e_n$  la base de  $E$  dont  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  est duale, de sorte que

$$\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Prenons  $\alpha \in \Lambda^r(E)$  et  $r$  vecteurs  $v_1, \dots, v_r \in E$ , que l'on peut écrire dans la base  $e_1, \dots, e_n$  sous la forme :

$$v_i = \sum_{j=1}^n v_{i,j} \cdot e_j$$

et alors, puisque  $\alpha$  est multilinéaire :

$$\alpha(v_1, \dots, v_r) = \alpha\left(\sum_{i_1=1}^n v_{1,i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_r=1}^n v_{r,i_r} e_{i_r}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_r=1, \dots, n} v_{1,i_1} \cdot \dots \cdot v_{r,i_r} \cdot \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$$

et puisque  $\alpha$  est alternée :

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_r} v_{1,i_1} \cdot \dots \cdot v_{r,i_r} \cdot \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \underbrace{\left( \sum_{j_1, \dots, j_r \in \{i_1, \dots, i_r\}} \delta_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} v_{1,j_1} \cdot \dots \cdot v_{r,j_r} \right)}_{=\det(v_{h,i_\ell})_{h,\ell=1, \dots, r}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r})(v_1, \dots, v_r) \end{aligned}$$

et donc, si l'on pose  $\alpha_{i_1, \dots, i_r} = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r}$$

ce qui montre bien que les  $\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}$  engendrent l'espace vectoriel  $\Lambda^r(E)$ . Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons d'avoir une relation du type :

$$\heartsuit \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_r} \cdot \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r} = 0 \quad , \quad \lambda_{i_1, \dots, i_r} \in \mathbb{R}$$

et remarquons que

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r})(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \delta_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} .$$

Il suit alors de  $\heartsuit$  que :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_r} \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r})(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \lambda_{j_1, \dots, j_r} = 0 \quad \forall 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$$

et donc les  $\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n}$  forment bien une base de  $\Lambda^r(E)$ .

*q.e.d.*

Dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$  muni de la base naturelle, dans ce contexte on a l'habitude de noter  $dx_1, \dots, dx_n$  la base duale, de sorte qu'une forme  $r$ -alternée sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \quad , \quad \alpha_{i_1, \dots, i_r} \in \mathbb{R}$$

**Remarque 1.10** Dans  $\mathbb{R}^3$ , les espaces  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$  et  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  sont tous deux de dimension 3, donc isomorphes entre eux et isomorphes à  $\mathbb{R}^3$ , et  $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$  est de dimension 1, donc isomorphe à  $\mathbb{R}$ . Si on choisit les isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\xrightarrow{\cong} \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \quad , \quad (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 \cdot dx_1 + a_2 \cdot dx_2 + a_3 \cdot dx_3 \\ \mathbb{R}^3 &\xrightarrow{\cong} \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + a_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + a_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

(notez la permutation cyclique des indices 1, 2, 3)

le produit extérieur de deux 1-formes fournit un produit sur  $\mathbb{R}^3$ , qui n'est autre que le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot dx_1 + a_2 \cdot dx_2 + a_3 \cdot dx_3) \wedge (b_1 \cdot dx_1 + b_2 \cdot dx_2 + b_3 \cdot dx_3) = \\ (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot dx_2 \wedge dx_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot (dx_3 \wedge dx_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (dx_1 \wedge dx_2) \end{aligned}$$

soit :

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

### Transposition par une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et soit  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire. On en déduit une application linéaire  $\Lambda^r(A)$  au niveau des  $r$ -formes de la manière suivante :

$$\Lambda^r(A) : \Lambda^r(F) \rightarrow \Lambda^r(E) \quad , \quad \Lambda^r(A)(\alpha)_{(v_1, \dots, v_r)} = \alpha(A(v_1), \dots, A(v_r)) \quad .$$

Notez que si  $r = 1$ , on retrouve la définition de la duale d'une application linéaire.

**Proposition 1.11** (1) Si  $E, F$  et  $G$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ , et  $A : E \rightarrow F$  et  $B : F \rightarrow G$  des applications linéaires, alors

$$\Lambda^r(B \circ A) = \Lambda^r(A) \circ \Lambda^r(B)$$

(2) si  $I_E : E \rightarrow E$  désigne l'application identité, alors

$$\Lambda^r(I_E) = I_{\Lambda^r(E)}$$

(3) si  $\alpha \in \Lambda^r(E)$  et  $\beta \in \Lambda^s(E)$ , on a :

$$\Lambda^{r+s}(A)(\alpha \wedge \beta) = \Lambda^r(A)(\alpha) \wedge \Lambda^s(A)(\beta)$$

- (4) si  $e_1, \dots, e_n$  est une base de  $E$  et  $f_1, \dots, f_p$  est une base de  $F$ , avec bases duales respectivement  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  et  $\psi_1, \dots, \psi_p$ , alors, pour toute suite  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  on a :

$$\Lambda^r(A)(\psi_{i_1} \wedge \dots \wedge \psi_{i_r}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq p} A_{i,j} \cdot (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_r})$$

où  $A_{i,j}$  désigne le mineur de la matrice de  $A$  dans les bases  $e_k, f_\ell$ , correspondant aux suites  $i$  et  $j$ ; explicitement, si  $(a_{k,\ell})$  désigne la matrice de  $A$  :

$$A_{i,j} = \det(a_{i_k, j_\ell})_{k,\ell=1,\dots,r}$$

Toutes ces propriétés se vérifient aisément à partir des définitions. ■

## 2 Formes différentielles

**Définition 2.1** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $r$  un entier compris entre 0 et  $n$ . Une  $r$ -forme différentielle sur  $U$  est une application  $\omega : U \rightarrow \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

En d'autres termes, une  $r$ -forme différentielle sur  $U$  est la donnée, pour tout point  $x$  de  $U$ , d'une  $r$ -forme alternée sur  $\mathbb{R}^n$ , dépendant de manière  $\mathcal{C}^\infty$  du point  $x$ .

En utilisant la base naturelle de  $\mathbb{R}^n$  et la base de  $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$  qu'on en déduit, on peut écrire

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_r}(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

les  $\binom{n}{r}$  fonctions  $\omega_{i_1, \dots, i_r}(x)$  étant définies sur  $U$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On dénote par  $\Omega^r(U)$  l'espace des  $r$ -formes différentielles sur  $U$

### Exemples 2.2

- (1) Voici une 1-forme sur  $\mathbb{R}^3$ :

$$x_2 \cdot dx_1 + x_2^2 x_3 dx_2 - x_1 x_3 \cdot dx_3$$

- (2) La 1-forme sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  suivante nous sera utile par la suite :

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad .$$

On peut interpréter cette forme en remarquant que  $\omega(x)_{(v)}$  vaut  $\tan(\alpha)$ , où  $\alpha$  est l'angle constitué par le vecteur  $(x, y)$  et le vecteur  $v = (v_x, v_y)$  (voir figure 4.1). Si  $\alpha$  est petit,  $\tan(\alpha) \approx \alpha$ .

- (3) Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , on note par  $df$  sa dérivée, qui peut être vue comme un élément de  $\Omega^1(U)$ , qu'on peut aussi écrire :

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

- (4) On note par  $\Omega^0(U)$  l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ ; c'est cohérent avec le fait que  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ .

Les constructions que l'on a introduites pour les formes alternées induisent des constructions analogues pour les formes différentielles.

Tout d'abord, notons que  $\Omega^r(U)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension non finie en général : si  $\alpha, \beta \in \Omega^r(U)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on peut poser

$$(\lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \beta)(x) = \lambda \cdot \alpha(x) + \mu \cdot \beta(x) \quad .$$

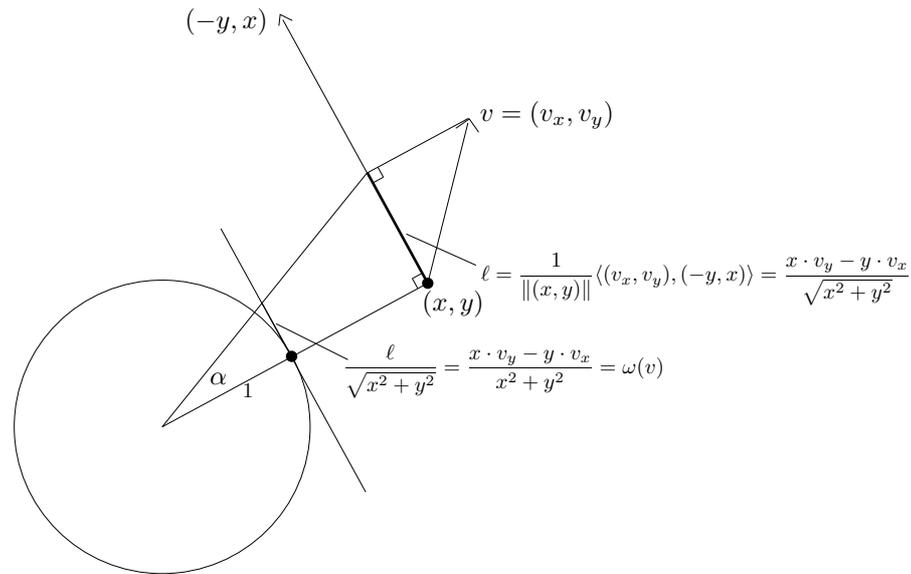


Figure IV.1: Interprétation géométrique de la forme  $\omega$

**Produit extérieur de deux formes**

Soient  $\alpha \in \Omega^r(U)$ ,  $\beta \in \Omega^s(U)$ ; on définit leur produit extérieur par :

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = (\alpha(x)) \wedge (\beta(x)) \quad .$$

les propriétés de distributivité, anticommutativité et associativité pour le produit extérieur de formes différentielles sont conséquence des propriétés analogues pour le produit de formes alternées établies dans la proposition 1.8.

Notons que si  $a(x) \in \Omega^0(U)$  est une fonction et  $\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ , alors

$$a(x) \wedge \beta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a(x) \cdot \alpha_{i_1, \dots, i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

que l'on peut aussi bien écrire  $a(x) \cdot \beta$ .

**Transposition par une application  $C^\infty$**

Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^p$  des ouverts et  $f : U \rightarrow V$  une application  $C^\infty$ . Elle induit une application  $f^* : \Omega^r(V) \rightarrow \Omega^r(U)$ , pour tout  $r$ , définie par la formule suivante :

$$f^*(\omega)(x) = \Lambda^r(df_x)(\omega(f(x)))$$

soit, explicitement :

$$f^*(\omega)(x)_{(v_1, \dots, v_r)} = \omega(f(x))_{(df_x(v_1), \dots, df_x(v_r))}$$

On voit qu'il est indispensable que  $f$  soit au moins de classe  $C^1$ , puisque l'expression de  $f^*$  fait appel à la dérivée de  $f$ . Si on note  $f = (f_1, \dots, f_p)$  et  $dy_1, \dots, dy_p$  le 1-formes de base duales à la base naturelle de  $\mathbb{R}^p$ , on a :

$$f^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}) = df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r} \quad .$$

Notons qu'il suit de 1.11(3) que  $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$ .

Vient maintenant une nouvelle opération sur les formes différentielles, qui généralise la dérivée d'une fonction.

### La différentielle extérieure

**Définition 2.3** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $\omega \in \Omega^r(U)$ , que l'on peut écrire :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_r}(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

où les  $\omega_{i_1, \dots, i_r}(x)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ . On définit la différentielle extérieure de  $\omega$  comme étant la  $r+1$ -forme différentielle définie par

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \quad .$$

Ceci définit une application  $d : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$  pour tout  $r \geq 0$ .

**Exemples 2.4** (1) Soit

$$\omega = xyz \cdot dx + yz \cdot dy + (x + y + z) \cdot dz$$

alors

$$\begin{aligned} d\omega &= yz \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + xz \cdot dy \wedge dx + xy \cdot dz \wedge dx + y \cdot dz \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz = \\ &= (1 - y) \cdot dy \wedge dz + (xy - 1) \cdot dz \wedge dx - xz \cdot dx \wedge dy \end{aligned}$$

(2) Si  $f \in \Omega^0(U)$ ,  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$ , ce qui montre que cette notation est cohérente avec la notation de dérivée d'une application.

(3) Calculons la différentielle extérieure de la forme différentielle de l'exemple **2.2(2)** :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \cdot \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \cdot dy \wedge dx \\ &= \left(\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \cdot dx \wedge dy + \left(\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \cdot dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

(4) Soit  $(a, b, c)$  un triplet de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , que l'on peut regarder comme un champ de vecteurs sur  $U$ . En utilisant les isomorphismes de la remarque **1.10**, on peut lui associer

(a) une 1-forme différentielle  $\varphi$  sur  $U$  :

$$\varphi = a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz$$

(b) une 2-forme différentielle  $\omega$  sur  $U$  :

$$\omega = a \cdot dy \wedge dz + b \cdot dz \wedge dx + c \cdot dx \wedge dy$$

On a :

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial c}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial y} dy \wedge dz \\ &\quad \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

et on reconnaît les 3 composantes du rotationnel du champ  $(a, b, c)$  dans les facteurs de  $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$  et  $dx \wedge dy$  respectivement (*dans cet ordre*).

Au tour de la différentielle de  $\omega$  :

$$d\omega = \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

et on reconnait que le facteur de  $dx \wedge dy \wedge dz$  est la divergence du champs  $(a, b, c)$ .

Voici les propriétés fondamentales de la différentielle extérieure.

**Proposition 2.5** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^p$  des ouverts.

i) Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^r(U)$ . Alors

$$d(\alpha_1 + \alpha_2) = d\alpha_1 + d\alpha_2$$

ii) Soient  $\alpha \in \Omega^r(U)$ ,  $\beta \in \Omega^s(U)$ ,  $r, s \geq 0$ . Alors :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \cdot \alpha \wedge d\beta$$

iii)

$$d(d\alpha) = 0$$

iv) Soit  $f : U \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\omega \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$ . Alors :

$$d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$$

*Preuve:* i) est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivée.

Pour ii), prenons d'abord un cas particulier de formes :

$$\alpha = a(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \quad , \quad \beta = b(x) \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$$

alors

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(a(x)b(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(a \cdot b)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} = \\ &\quad \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} \cdot b + a \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} = \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) \wedge (b(x) \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}) + \\ &\quad (a(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) \wedge \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_i} (-1)^r dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \right) = \\ &\quad d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

et de là on déduit le cas général par linéarité de la différentielle extérieure et distributivité du produit extérieur.

Pour iii) et iv) on utilise le même procédé. Soit  $\alpha = a(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ ; alors

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} = \\ &\quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} = 0 \end{aligned}$$

Pour iv), prenons d'abord le cas où  $\alpha = a(y)$ , une 0-forme, auquel cas  $f^*(a)$  est simplement la composée  $a \circ f$  :

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha) &= f^* \left( \sum_{i=1}^p \frac{\partial a}{\partial y_i} dy_i \right) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial a}{\partial y_i}(f(x)) df_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_i}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i=1}^p \frac{\partial a}{\partial y_i}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)}_{=\frac{\partial(a \circ f)}{\partial x_j}} dx_j = d(a \circ f) = d(f^*(\alpha)) \quad . \end{aligned}$$

Maintenant on prend  $\alpha = a(y) \cdot dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}$ . Alors :

$$f^*(\alpha) = a(f(x)) \cdot df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r} = f^*(a) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}$$

et donc

$$\begin{aligned} d(f^*(\alpha)) &= d \left( f^*(a) \cdot df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r} \right) \stackrel{\text{par ii)}}{=} \\ &= \underbrace{d(f^*(a))}_{=f^*(d(a))} \wedge (df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}) + f^*(a) \wedge \underbrace{d(df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r})}_{=0 \text{ par ii) et iii)}} = \\ &= f^*(d(a)) \wedge f^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy_{i_r}) = f^*(d(a) \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}) = f^*(d(\alpha)) \quad . \end{aligned}$$

*q.e.d.*

### 3 Intégration de formes et théorème de Stokes

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega = a(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  une  $n$ -forme sur  $U$  et  $A \subset U$  un sous-ensemble de bord négligeable, au sens de la théorie de la mesure. On définit l'intégrale de  $\omega$  sur  $A$  par :

$$\int_A \omega = \int_A a(x) dx_1 \dots dx_n$$

Soit  $I^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  le cube standard et définissons, pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\varepsilon = 0, 1$  :

$$\varphi_{i,\varepsilon} : I^{n-1} \rightarrow I^n \quad , \quad \varphi_{i,\varepsilon}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \underbrace{(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \dots, x_n)}_i \quad .$$

il s'agit de paramétrisations naturelles des  $2n$  faces du cube  $I^n$ .

**Proposition 3.1 (Le lemme de Stokes)** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert contenant le cube  $I^n$  et soit  $\omega$  une  $n-1$ -forme sur  $U$ . Alors :*

$$\int_{I^n} d\omega = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ \varepsilon=0, 1}} (-1)^{i+\varepsilon} \int_{I^{n-1}} \varphi_{i,\varepsilon}^*(\omega) \quad .$$

*Preuve:* On peut écrire

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx}_i \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

où le symbole  $\widehat{dx}_i$  indique que ce terme est ôté. Alors

$$d\omega = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

et donc

$$\heartsuit \quad \int_{I^n} d\omega = \sum_{i=1}^n \int_{I^n} (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{I^n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n$$

Or

$$\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i = a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{\varepsilon=0,1} (-1)^{\varepsilon-1} \varphi_{i,\varepsilon}^*(\omega)$$

et alors  $\heartsuit$  donne :

$$\int_{I^n} d\omega = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ \varepsilon=0,1}} (-1)^{i+\varepsilon} \int_{I^{n-1}} \varphi_{i,\varepsilon}^*(\omega) \quad .$$

*q.e.d.*

On étend les intégrales de formes à des objets paramétrés. Soit  $\varphi : I^r \rightarrow U$  une application  $\mathcal{C}^\infty$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\omega \in \Omega^r(U)$ . On pose :

$$\int_{\varphi} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{I^r} \varphi^*(\omega)$$

**Exemple 3.2** Soit

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

et  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  la paramétrisation du cercle :

$$\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad .$$

Alors

$$\varphi^*(\omega) = \frac{\cos(2\pi t) \cdot d(\sin(2\pi t)) - \sin(2\pi t) \cdot d \cos(2\pi t)}{\cos(2\pi t)^2 + \sin(2\pi t)^2} = 2\pi \cdot dt$$

et donc

$$\int_{\varphi} \omega = \int_0^1 2\pi \cdot dt = 2\pi \quad .$$

Ce résultat n'est pas étonnant, au vu de l'interprétation de  $\omega$  donnée dans **2.2(2)**

**Définition 3.3** Une  $r$ -chaîne cubique, singulière de  $U$  est une expression de la forme :

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k$$

où  $c_k \in \mathbb{R}$  et  $\varphi_k : I^r \rightarrow U$  est une application  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ .

On dit aussi simplement que  $c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k$  est une  $r$ -chaîne. Remarquons que le signe somme est purement formel : aucune somme n'est effectuée, c'est une façon de se donner la collection des  $c_k$  et  $\varphi_k$ .

On définit le bord  $\partial\varphi_k$  comme étant la  $r - 1$ -chaîne :

$$\partial(\varphi_k) = \sum (-1)^{i+\varepsilon} (\varphi_k \circ \varphi_{i,\varepsilon})$$

et le bord de la  $k$ -chaîne  $c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k$  par :

$$\partial c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \partial\varphi_k \quad .$$

On note par  $C_r(U)$  l'ensemble des  $r$ -chaînes cubiques singulière, qui est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ;  $\partial : C_r(U) \rightarrow C_{r-1}(U)$  est une application linéaire.

Si  $c = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \varphi_k \in C_r(U)$  et  $\omega \in \Omega^r(U)$ , on pose :

$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \cdot \int_{c_k} \omega$$

**Théorème 3.4 (Théorème de Stokes)** Soit  $c \in C_r(U)$  et  $\omega \in \Omega^{r-1}(U)$ . Alors :

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

*Preuve:* Cela résulte immédiatement du lemme de Stokes et des définitions. ■

## 4 Applications

### Le théorème du point fixe de Brouwer

**Théorème 4.1** Soit  $D^2 \subset \mathbb{R}^2$  le disque unité et  $S^1$  son bord. Il n'existe pas d'application continue  $f : D^2 \rightarrow S^1$  qui soit l'identité en restriction au bord  $S^1$ .

*Preuve:* Soient

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \quad , \quad \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad , \quad \varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

et

$$\psi : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \psi(t_1, t_2) = t_1 \cdot ((\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2)))$$

de sorte que

$$\partial\psi = (-1) \cdot 0 \cdot (\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2)) + t_1 \cdot (\cos(0), \sin(0)) + (\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2)) - t_1 (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = \varphi \quad .$$

On se rappelle aussi que  $d\omega = 0$  (exemple **2.4(3)**). Par abus, et souci de clarté, on écrira  $S^1$  au lieu de  $\varphi$  et  $D^2$  au lieu de  $\psi$ , de sorte que  $S^1 = \partial D^2$ .

On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe  $f : D^2 \rightarrow D^2$  qui soit l'identité sur  $S^1$ .

Supposons d'abord que  $f$  soit  $C^\infty$ , ce qui signifie qu'il existe un ouvert  $U \supset D^2$  et une application  $C^\infty$   $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui étend  $f$ ; cela permet de donner un sens à la transposition  $f^*(\omega)$ . Puisque  $f|_{S^1} = id_{S^1}$ , on aurait, en appliquant le théorème de Stokes :

$$\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} f^*(\omega) = \int_{\partial D^2} f^*(\omega) = \int_{D^2} \underbrace{d(f^*(\omega))}_{=f^*(d\omega)=0} = 0 \neq 2\pi$$

donc un tel  $f$  ne peut pas exister.

Dans le cas général, prenons d'abord  $\varepsilon > 0$  petit et définissons  $g : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x)(1 - \varepsilon) & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ x(1 - \varepsilon) & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que  $g$  est à valeurs dans  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1 - \varepsilon\}$ , et pour  $\|x\| \geq 1 - \varepsilon$ ,  $g(x) = x(1 - \varepsilon)$  est proche de l'identité; en particulier,  $g$  est de classe  $C^\infty$  pour  $\|x\| \geq 1 - \varepsilon/2$ . On invoque alors le théorème d'approximation de Weierstrass<sup>1</sup> pour conclure à l'existence d'une application  $h : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ , proche de  $g$  avec ses premières dérivées pour  $\|x\| \geq 1 - \varepsilon/2$ ; en particulier,  $h$  sera à valeurs dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Alors  $\int_{S^1} \omega$  est

<sup>1</sup>Une version simplifiée de ce théorème à été démontrée dans **I.2.10**

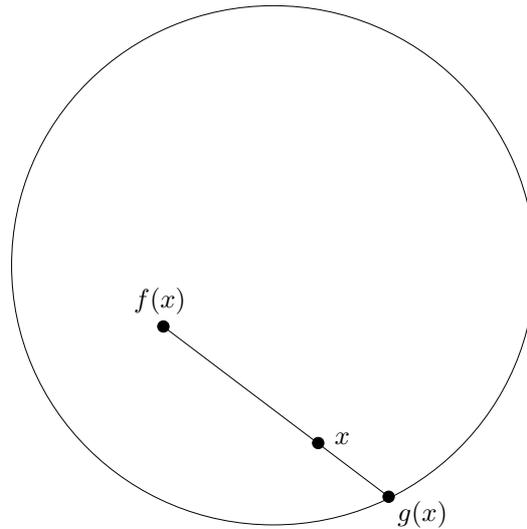


Figure IV.2: La rétraction \$g(x)\$ associée à \$f(x)\$

proche de \$\int\_{S^1} h^\*(\omega)\$, donc non nulle, mais d'autre part on trouve comme tout-à-l'heure, par le théorème de Stokes :

$$\int_{S^1} h^*(\omega) = \int_{\partial D^2} h^*(\omega) = \int_{D^2} \underbrace{d(h^*(\omega))}_{=h^*(d\omega)=0} = 0$$

ce qui est une contradiction.

*q.e.d.*

On exprime le resultat précédent en disant que \$D^2\$ ne peut pas se rétracter sur son bord. En fait ce résultat est valable pour les disques de toute dimension : \$D^n = \{(x\_1, \dots, x\_n) \in \mathbb{R}^n \mid x\_1^2 + \dots + x\_n^2 \leq 1\}\$ ne peut pas se rétracter sur la sphère \$S^{n-1} = \{(x\_1, \dots, x\_n) \in \mathbb{R}^n \mid x\_1^2 + \dots + x\_n^2 = 1\}\$. Pour \$n = 1\$ c'est un petit exercice, pour \$n \ge 3\$ cela peut se démontrer de manière analogue au théorème précédent.

Une conséquence du théorème précédent est le théorème du point fixe de Brower :

**Théorème 4.2** *Toute application continue \$f : D^2 \to D^2\$ possède un point fixe : \$\exists a \in D^2\$ tel que \$f(a) = a\$.*

*Preuve:* Si \$f : D^2 \to D^2\$ n'a pas de point fixe, on en déduit une rétraction \$g\$ de \$D^2\$ sur son bord de la manière suivante : si \$x \in D^2\$, puisque \$f(x) \neq x\$, on peut tracer la demi-droite issue de \$f(x)\$ passant pas \$x\$; \$g(x)\$ sera l'intersection de cette demi-droite avec le bord de \$D^2\$. En formule, cela donne

$$g(x) = x + \frac{\sqrt{\langle x, x - f(x) \rangle^2 + (1 - \|x\|^2) \cdot \|x - f(x)\|^2} - \langle x, x - f(x) \rangle}{\|x - f(x)\|^2} \cdot (x - f(x))$$

Le lecteur pourra faire les multiples vérifications nécessaires par lui-même, ou simplement s'en convaincre sur le dessin (figure IV.2).

*q.e.d.*

Notons que le théorème de Brower est vrai en toute dimension, avec une preuve qui suit les mêmes lignes que le cas particulier que nous avons traité ici.

**Le théorème de Nash sur l'existence de points d'équilibre**

Ce résultat de Nash se place dans la théorie des jeux, et trouve son application dans la modélisation de stratégies économiques. On en propose ici une version simplifiée, calquée sur l'exposition donnée par John Milnor dans[7].

On suppose qu'il y a  $n$  joueurs, numérotés de 1 à  $n$ . Le  $i$ -ème joueur choisit la valeur d'une variable  $s_i$  dans un ensemble  $S_i$ , l'ensemble des stratégies possibles pour le  $i$ -ème joueur, ceci pour  $i = 1, \dots, n$ ; les joueurs choisissent leur stratégies simultanément. A chaque joueur correspond une fonction "gain"  $p_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Chaque joueur essaie de maximaliser son gain  $p_i(s_1, \dots, s_n)$ , mais ne peut choisir que sa propre stratégie  $s_i$ . Le but du jeu est de faire en sorte que chaque joueur puisse gagner de manière satisfaisante (par opposition aux jeux dits "à somme nulle", comme la guerre, où les uns gagnent dans la mesure où les autres perdent).

La première contribution importante de Nash a été de donner une notion appropriée de point d'équilibre pour ces jeux; la voici :

**Définition 4.3** Un  $n$ -tuple de stratégies  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  est un point d'équilibre si aucun joueur ne peut augmenter son gain  $p_i(s_1, \dots, s_n)$  en changeant la valeur de  $s_i$ , pendant que les  $s_j$ ,  $j \neq i$ , restent fixes.

**Exemple 4.4** Un groupe de  $n$  personnes va dîner au restaurant. Le prix des menus varie de 20 à 30 francs; on décide de partager la facture en  $n$  parts égales, indépendamment du menu choisi. Ici  $s_i =$  prix du menu choisi par  $i$ , et  $S_i = [20, 30]$ ; le gain de chacun est la différence entre le prix du menu qu'il a choisi et ce qu'il paye :

$$p_i(s_1, \dots, s_n) = s_i - 1/n(s_1 + \dots + s_n) \quad .$$

On voit que  $p_i$  est strictement croissante en  $s_i$ , quelles que soient les valeurs des autres  $s_j$ . Le seul point d'équilibre est donc  $(30, \dots, 30)$  : tout le monde choisit le menu le plus cher.

Et voici le résultat principal.

**Théorème 4.5** Supposons que les ensembles  $S_i$  soient des sous-ensembles convexes de  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et que les fonctions  $p_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}$  soient continues par rapport à l'ensemble des variables  $(s_1, \dots, s_n)$  et linéaires par rapport à la variable  $s_i$ . Alors il existe au moins un point d'équilibre.

Nous ferons la démonstration seulement dans le cas où  $n = 2$  et  $S_1 = S_2 = [-1, 1]$ ; l'idée est de se ramener au théorème de Brouwer, que nous avons démontré dans le cas  $n = 2$ . Donc on suppose dorénavant que  $S_1 = S_2 = [-1, 1]$ .

**Exemple 4.6** Voici un exemple abstrait. On prend  $p_1(s_1, s_2) = s_1 \cdot s_2^2$  et  $p_2 = s_1^4 \cdot s_2 - 3s_1^3 + 2$ . Les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$  sont des points d'équilibre.

**Lemme 4.7** Soit  $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $v : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue. Alors :

- soit il existe  $\hat{s} \in K$  avec  $v(\hat{s}) = 0$
- soit il existe  $\hat{s}$  sur le bord de  $K$  tel que  $v(\hat{s})$  pointe vers l'extérieur de  $K$ .

*Preuve:* Soit  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$  la rétraction de  $\mathbb{R}^2$  sur  $K$  définie par

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|_\infty} & \text{si } \|(x, y)\|_\infty \geq 1 \\ (x, y) & \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad \text{où } \|(x, y)\|_\infty = \sup\{|x|, |y|\}$$

Alors l'application  $f : K \rightarrow K$ ,  $f(s) = \rho(s + v(s))$ , admet un point fixe  $\hat{s}$  d'après le théorème du point fixe de Brouwer 4.2.

- si  $\hat{s} + v(\hat{s}) \in K$ , alors

$$\hat{s} = \hat{s} + v(\hat{s}) \quad \Rightarrow \quad v(\hat{s}) = 0$$

- sinon  $\hat{s} + v(\hat{s}) \notin K$ , donc  $\hat{s} = \rho(\hat{s} + v(\hat{s}))$  est sur le bord de  $K$ , et  $v(\hat{s})$  pointe vers l'extérieur de  $K$  (voir figure IV.3).

*q.e.d.*

*Preuve de 4.5.* On applique le lemme à  $v(s_1, s_2) = (\frac{\partial p_1}{\partial s_1}, \frac{\partial p_2}{\partial s_2})$ .

*q.e.d.*

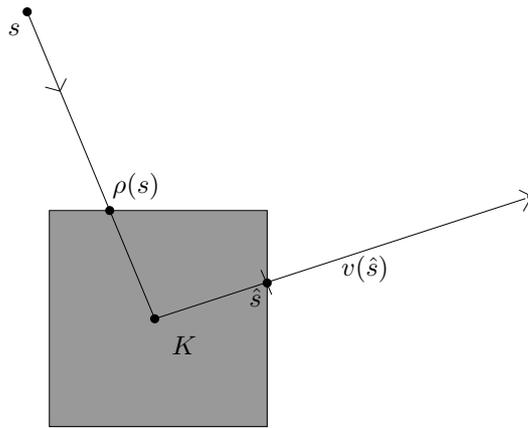


Figure IV.3: Interprétation du lemme 4.7

## 5 Exercices

### A Formes multilinéaires alternées

1 Soit  $\alpha \in A^2(\mathbb{R}^{2n})$  définie par

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

Calculer  $\underbrace{\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}_{n \text{ fois}}$ .

2 Soient  $\gamma \in \Lambda^1(E)$ ,  $\gamma \neq 0$ , et  $\alpha \in \Lambda^r(E)$ . Montrer que pour qu'il existe  $\beta \in \Lambda^{r-1}(E)$  telle que  $\alpha = \beta \wedge \gamma$ , il faut et il suffit que  $\alpha \wedge \gamma = 0$ .

3

a) Soit  $f_1, \dots, f_n$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sa base duale. Montrer que

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n = \pm dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

et que le signe détermine l'orientation de  $f_1, \dots, f_n$ .

b) Montrer que l'isomorphisme :

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \mapsto a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$$

ne dépend que de l'orientation et de la métrique de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire que si au lieu de prendre la base naturelle de  $\mathbb{R}^3$  et sa duale  $dx_1, dx_2, dx_3$  on prend une autre base orthonormale, de même orientation, et sa duale, on obtient le même isomorphisme.

4 Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire. Soient  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $E$ ,  $f_1, \dots, f_p$  une base de  $F$ , et soient  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  les bases duales respectives. Montrer que pour toute suite  $1 \leq i_1 \cdots \leq i_r$  on a :

$$\Lambda^r(A)(\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{i_r}) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r} A_{i,j} \cdot \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_r}$$

où  $A_{i,j}$  désigne le  $r \times r$ -mineur de la matrice  $(a_{k,h})$  de  $A$  correspondant aux suite  $(i_1, \dots, i_r), (j_1, \dots, j_r)$  :

$$A_{i,j} = \det (a_{i_k, j_h})_{k,h=1, \dots, r}$$

**B Formes différentielles**

5 Définissons la  $(n - 1)$ -forme  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  par :

$$\omega(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{n}{2}}}$$

Montrer que  $d\omega = 0$ . Calculer  $\omega \wedge df$ , où  $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

# Bibliographie

- [1] M.F. Barnsley and A.D. Sloan. A better way to compress images. *Byte*, janvier 1988. 20
- [2] G.A. Bliss. *Calculus of variations*. The Open Court Publishing Company, Chicago, 1925. 71
- [3] C. Carathéodory. *Variationsrechnung*. Teubner Verlag, Leipzig und Berlin, 1935. 73
- [4] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by its history*. Springer Verlag, Berlin, 1997. 3, 6, 10, 17, 24, 71
- [5] B. Mandelbrot. *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*. Flammarion, Paris, 1975. 20
- [6] J.E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*, volume 19 of *Applied Math. Sciences*. Springer Verlag, 1976. 137
- [7] J. Milnor. A Nobel Prize for John Nash. *The mathematical Intelligencer*, 17(3), 1981. 155
- [8] Lee.-A. Rubeel. A universal differential equation. *Bulletin of the American Math. Society (New Series)*, 4(3):345–349, 1981. 98
- [9] G.F. Simmons. *Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, 1972. 128
- [10] V. Volterra. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931. 130
- [11] H. Whitney. On singularities of mappings of euclidian spaces I, Mappings of the plane into the plane. *Ann. of Math.*, 62(62):374–410, 1955. 85

# Index

- $\Lambda^r(E)$ , 143
- $\Omega^r(U)$ , 148
- $\Sigma(f)$ , 82
- $\|f\|_1$ , 3
- $\|f\|_\infty$ , 3
- $\|f\|_2$ , 3
- $\mathcal{C}^k$ , 47
  
- adhérence, 7
- aplatissement local, 81
- application
  - continue, 4
  - contractante, 15
  - dérivable, 43
  - dérivable par morceaux, 107
  - de classe  $\mathcal{C}^1$ , 45
  - de classe  $\mathcal{C}^k$ , 47
  - linéaire par morceaux, 107
  - lipschitzienne, 106
  - localement lipschitzienne, 110
  
- Bernstein, polynôme de, 9
- boule, 7
  
- Cauchy, suite de, 12
- cercle osculateur, 90
- chaîne cubique, 153
- champ de vecteurs, 98
  - orbites, 99
  - trajectoires, 99
  - transport, 99
- complet, 12
- condition initiale, 96
- constante de Lipschitz, 106
- contour apparent, 83
- coordonnées polaires, 77, 99
- courbe de von Koch, 21
- cusps ordinaires, 85
  
- dérivée
  - d'ordre supérieur, 48
  - d'une application linéaire, 43
  - dans la direction du vecteur  $v$ , 43
  - de fonctions composées, 44
  - partielle, 44, 46
- dérivabilité, 43
  
- difféomorphisme, 76
- différentielle extérieure, 150
- dimension de Hausdorff, 20, 25
- dîner au restaurant, 156
- distance, 1
- droite tangente
  - courbe dans l'espace, 59
  - courbe plane, 57
- droites normales, 90
  
- ensemble de Cantor, 20
- enveloppe, 87
- équation
  - d'Euler-Lagrange, 71, 74
  - indicielle, 126
  - locale régulière, 81
- équation différentielle
  - autonome, 98
  - de Lotke-Volterra, 130
  - hypergéométrique, 128
  - ordinaire, 95
  - sous forme normale, 95
- équation intégrale
  - de Fredholm, 16
  - de Volterra, 19
- espace
  - complet, 12
  - métrique, 1
  - vectorel normé, 2
- espace tangent, 64
- exponentielle de matrices, 120
- extremale, 68
- extremum local, 47, 53
- extremum local lié, 62
  
- famille de polynômes, 60
- fermé, 7
- flot, 113
- fonction
  - de Liapounov, 131
  - hypergéométrique, 129
- fonctionnelle, 68
- forme
  - alternée, 143
  - différentielle, 148

- formule de Taylor
  - à une variable, 50
  - cas général, 52
- fougère, 31
- fractals, 20
- fronce, 82
- géodésique, 73, 75
- Gronwall (lemme de), 107
- IFS (Iterated Functions System), 27
- inégalité du triangle, 1, 2
- inégalité fondamentale, 108
- lemme de Stokes, 152
- limite
  - d'une application, 4
  - d'une suite, 4
- lune décroissante, 85
- méthode de Newton, 16
- méthode de Newton, variante, 17
- métrique, 1
- métrique discrète, 2
- maximum local, 47
- minimum local, 47
- multiplicateurs de Lagrange, 65
- Newton, méthode de, 16
- norme d'une application linéaire, 41
- ouvert, 7
- parabole semi-cubique, 81
- paramétrisation locale, 81
- partie linéaire d'un champ, 133
- plan tangent, 75
- plan tangent à une surface, 59
- pli, 82
- point critique d'un champ de vecteurs, 129
- point d'équilibre d'un champ de vecteurs, 129
  - stable, 129
  - asymptotiquement stable, 129
- point d'équilibre de Nash, 156
- point doubles ordinaires, 85
- point régulier
  - courbe dans l'espace, 59
  - courbe plane, 57
  - de  $Z(f)$ , 64
  - surface dans l'espace, 59
- point singulier
  - courbe dans l'espace, 59
  - courbe plane, 57
  - d'une application, 82
  - de  $Z(f)$ , 64
  - surface dans l'espace, 59
- point singulier d'une équation différentielle d'ordre 2, 125
- points stationnaires, 65
- polynôme de Bernstein, 9
- produit
  - extérieur
    - de formes alternées, 145
    - de formes différentielles, 149
  - vectorel, 147
- quasi-polynôme, 118
- racines simples, 60
- solution maximale, 96
- stabilité structurelle, 135
- suite de Cauchy, 12
- symbole de Kronecker (généralisé), 145
- système fondamental de solutions, 113
- système linéaire
  - homogène, 113
  - inhomogène, 113
- théorème
  - d'approximation de Weierstrass, 9
  - d'existence d'équilibre de Nash, 156
  - d'existence et unicité globales, 111
  - d'existence et unicités locales, 110
  - d'instabilité, 132
  - de décomposition, 124
  - de dépendance continue par rapport aux conditions initiales, 112
  - de l'application inverse, 76
  - de stabilité, 131
  - de Stokes, 154
  - des accroissements finis, 45
  - des fonctions implicites, 55, 97
  - du point fixe, 15
  - du point fixe de Brower, 155
  - du rang, 77
- théorie des jeux, 155
- tore, 80
- transposition
  - d'une forme alternée, 147
  - de formes différentielles, 149
- triangle de Sierpinski, 21
- voisinage, 8