

UE 41c : *Mécanique du Solide*

DEUG Sciences de la Matière 2^{ème} année



Notes de cours
Exercices
Sujets d'examen

P.Fertey

Laboratoire de Cristallographie et Modélisation des Matériaux Minéraux et Biologiques
UPRESA CNRS N° 7036 - Université Henri Poincaré, Nancy I – Faculté des Sciences,
BP 239 – 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

Tél : 03 83 91 25 69 – Fax : (33) (0)3 83 40 64 92
courriel : pfertey@lcm3b.uhp-nancy.fr

SOMMAIRE

RAPPELS D'ANALYSE VECTORIELLE 3

I	GENERALITES	3
II	RAPPELS DE CALCUL VECTORIEL	3
III	ELEMENTS DE REDUCTION D'UN SYSTEME DE VECTEURS	5

CINEMATIQUE 7

I	REFERENTIEL	7
II	RAPPELS	8
III	CINEMATIQUE DU SOLIDE	11
IV	COMPOSITION DES MOUVEMENTS (CHANGEMENT DE REFERENTIEL)	16
V	MOUVEMENT DE DEUX SOLIDES EN CONTACT	20

CINETIQUE 23

I	CENTRE DE MASSE	24
II	QUANTITE DE MOUVEMENT – MOMENT CINETIQUE	27
III	REFERENTIEL BARYCENTRIQUE	29
IV	1 ^{er} THEOREME DE KOENIG	29
V	MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE	30
VI	ENERGIE CINETIQUE	31
VII	MATRICE D'INERTIE	33

DYNAMIQUE 41

I	FORCES	41
II	PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DES SYSTEMES	42
III	THEOREME DES ACTIONS RECIPROQUES	46
IV	THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE	47

FORCES DE FROTTEMENT 53

I	GENERALITES	53
II	LOIS DU FROTTEMENT SOLIDE	54
III	TRAVAIL DES FORCES DE FROTTEMENT	58

ANNEXES 61

	ANNEXE A	61
	ANNEXE B	63
	ANNEXE C	65

EXERCICES 67

ANNALES 75

	Références bibliographiques	83
--	-----------------------------	----

RAPPELS D'ANALYSE VECTORIELLE

I GENERALITES

La mécanique a pour objet l'étude des mouvements et des déformations que subissent les corps sous l'influence de diverses causes qui peuvent agir sur eux. Ces diverses causes sont représentées, du point de vue de leurs actions mécaniques, par des grandeurs qui sont toutes de même nature : les forces.

Du point de vue mathématiques, ces influences sont représentées par des grandeurs vectorielles. Ainsi, à une force donnée est associé un vecteur, caractérisé par une direction, un sens, une intensité et un point d'application. Du point de vue du formalisme mathématique, l'étude du mouvement d'un système soumis à un ensemble de forces implique donc, dans un premier temps, la caractérisation de cet ensemble de forces par ses éléments de réduction. Ce sont ces éléments de réduction qui interviennent dans le principe fondamental de la dynamique, permettant de comprendre l'origine d'un changement dans le mouvement du système.

Ce chapitre a pour objectif de rappeler les concepts de base de l'analyse vectorielle.

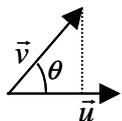
II RAPPELS DE CALCUL VECTORIEL

La position d'un point matériel M dans un espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est déterminé par le vecteur position \vec{OM} . Très souvent le repère est orthonormé. La projection du vecteur \vec{OM} sur les axes du repères définit les 3 paramètres nécessaires à la caractérisation de la position du point M .

Différents repères d'étude sont possibles, en fonction de la « symétrie » du problème étudié. Rappelons les principales coordonnées rencontrées :

- i) les coordonnées cartésiennes : x, y et z ,
- ii) les coordonnées cylindriques : r, θ et z ,
- iii) les coordonnées sphériques : r, θ et ϕ .

1. Produit scalaire



Le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{u}$ représente la projection de \vec{v} sur \vec{u} : le produit scalaire est un nombre réel positif ou négatif (un scalaire).

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \theta$$

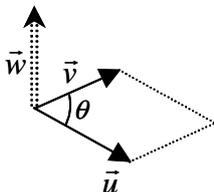
si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée :

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 v_i u_i .$$

2. Produit vectoriel



Le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur tel que :

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme un trièdre direct (règle de la main droite, du tir bouchon)

$|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\sin \theta|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} .

Propriétés :

antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$,

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} // \vec{v}$,

Remarque : le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un *vecteur axial* : son sens est lié à la convention d'orientation de l'espace (à la différence d'un vecteur dit polaire dont le sens est indépendant de la convention d'orientation de l'espace).

Dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

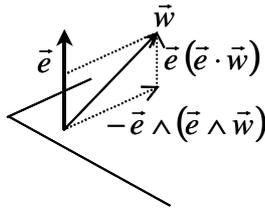
$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{vmatrix}$$

3. Double produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} (\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w} (\vec{u} \cdot \vec{v})$$



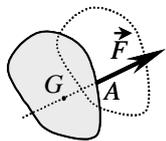
Si $\vec{u} = \vec{v} = \vec{e}$ est un vecteur unitaire.

$\vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{w}) = \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{w}) - \vec{w}$ donc $\vec{w} = -\vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{w}) + \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{w})$,

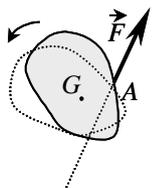
ce qui donne un moyen simple de trouver la composante de \vec{w} dans un plan perpendiculaire à \vec{e} : $-\vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{w})$.

4. Moment en un point

Soit la résultante \vec{F} des forces agissant sur un corps, appliquée au point A. Soit G le centre de masse du corps. Les effets de la force sont de types :



Si le support de la force passe par le point G, le corps subira une translation sous l'effet de cette force : le mouvement du corps est analogue à celui d'un point matériel subissant la force \vec{F} .



Si le support de \vec{F} ne passe pas par le point G, le corps amorce un mouvement de rotation autour de G. La rotation sera d'autant plus « efficace » que $|\vec{F}|$ est grande et/ou que le bras de levier (i.e. la distance du support de la force au point G) est grand.

Par définition, on appelle *moment de \vec{F} au point G*, le vecteur $\vec{M}_G(\vec{F}) = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{F}$.

En un autre point O : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \vec{M}_G(\vec{F}) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}$.

Remarque : moment par rapport à un axe

Par définition, on appelle *moment de \vec{F} par rapport à un axe Δ* , la projection sur l'axe Δ du moment de \vec{F} en un point O de l'axe Δ . Si \vec{e}_Δ est un vecteur directeur de l'axe Δ :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta.$$

Ce moment est indépendant du choix de O sur l'axe Δ .

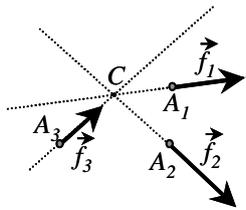
III ELEMENTS DE REDUCTION D'UN SYSTEME DE VECTEURS

Soit un ensemble de vecteurs \vec{f}_i appliqués aux points A_i (i variant de 1 à n). Cet ensemble de vecteurs est caractérisé par ses *éléments de réduction* :

i) le vecteur somme ou *résultante* : $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$

ii) le vecteur moment en un point Q ou *moment résultant* : $\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QA_i} \wedge \vec{f}_i$.

1. Eléments de réduction d'un système de forces concourantes



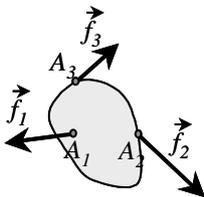
Soit un ensemble de vecteurs forces \vec{f}_i appliqués aux points A_i (i variant de 1 à n), tels que les support des \vec{f}_i soient concourants en C .

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_C + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QC} \wedge \vec{f}_i = \overrightarrow{QC} \wedge \sum_{i=1}^n \vec{f}_i = \overrightarrow{QC} \wedge \vec{F} \text{ puisque } \vec{M}_C = \vec{0}.$$

Un système de vecteurs dont les support sont concourants est donc équivalent à un vecteur unique \vec{F} .

2. Eléments de réduction d'un système de forces appliquées à un solide



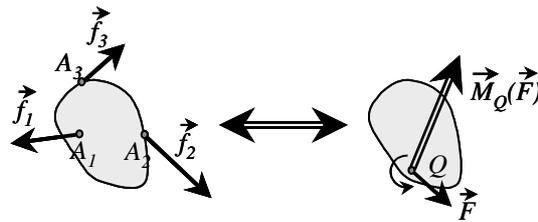
Soit un ensemble de vecteurs forces \vec{f}_i appliqués aux points A_i (i variant de 1 à n), d'un corps solide S :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$$

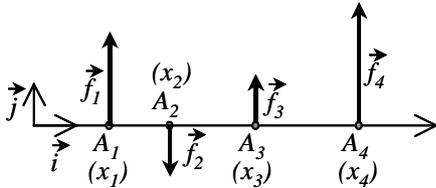
$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QA_i} \wedge \vec{f}_i$$

Il n'est donc pas toujours possible de réduire un système de vecteur à un vecteur unique. Dans le cas ci-dessus, il n'est en effet pas possible de choisir Q tel que $\vec{M}_Q = \overrightarrow{QC} \wedge \vec{F}$ car \vec{M}_Q n'est pas perpendiculaire à \vec{F} .

Cependant, il est toujours possible de réduire un ensemble de vecteurs à un vecteur résultant et un moment résultant en un point Q :



3. Eléments de réduction d'un système de forces parallèles



Soit un ensemble de vecteurs forces \vec{f}_i appliqués aux points A_i d'abscisses x_i (i variant de 1 à n), dont les supports sont parallèles.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{f}_i = \sum_{i=1}^n x_i \vec{i} \wedge f_i \vec{j} = \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i \right) \vec{k} \text{ avec } \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

Existe-t-il un point C où serait appliqué la résultante \vec{F} et tel que $\vec{M}_O = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}$?

Puisque \vec{F} et \vec{M}_O sont perpendiculaires, le point C existe et $x_C = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i}$.

Le point C définit le *centre de forces parallèles*.

Application : dans le cas où $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ (force de gravitation) le centre de force n'est autre que le centre de gravité.

4. Couple / Glisseur

Lorsque les éléments de réduction d'un système de vecteurs \vec{f}_i sont tels que la résultante est nulle ($\vec{F} = \vec{0}$), quels que soient les points P et Q : $\vec{M}_Q = \vec{M}_P = \vec{M}$.

Le système de vecteurs est équivalent à 2 vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que : $\vec{u} = -\vec{v}$.
Ces deux vecteurs forment un *couple*.

Lorsque les éléments de réduction d'un système de vecteurs \vec{f}_i sont tels que le moment résultant en un point Q est nul ($\vec{M}_Q = \vec{0}$), quel que soit le point P : $\vec{M}_P = \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{F}$.

Le système de vecteurs est équivalent à un seul vecteur \vec{u} , dont le moment en P est indépendant du point d'application O de \vec{F} pris sur le support de \vec{F} (le point d'application de \vec{F} peut glisser sur son support).

Ce vecteur définit un *glisseur*.

Remarque : un système de vecteurs quelconques peut toujours se réduire à un glisseur et un couple (donc à 3 vecteurs dont 2 forment un couple).

CINEMATIQUE¹

I REFERENTIEL

Un objet est en mouvement par rapport à un autre si sa position, mesurée par rapport au second objet, change en fonction du temps. Tout mouvement n'est donc défini que par rapport à un système de référence donné : un repère d'espace **et** un repère de temps **liés** à un **observateur donné**.

Un référentiel est donc par définition, un système d'axes liés à un observateur muni d'une horloge définissant un temps t .

Le repère d'espace est caractérisé par une origine O et une base de 3 vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que l'on peut supposer orthonormés.

Du point de vue de la cinématique, tous les référentiels sont équivalents pour la description des mouvements. Il n'est donc pas nécessaire de privilégier un référentiel particulier. Il faut néanmoins préciser le référentiel de l'observateur car deux observateurs placés dans deux référentiels en mouvement relatif décriront de façon différente le mouvement d'un même système. Autrement dit, les trajectoires d'un même système peuvent être différentes pour deux observateurs liés à des référentiels en mouvement relatif.

Cependant, le choix du référentiel n'est pas anodin pour l'explication du mouvement. Les référentiels galiléens (ou d'inertie), dont la première loi de *Newton* postule l'existence, jouent un rôle privilégiés puisque la deuxième loi de *Newton* est toujours applicable sans précautions particulières :

$$\vec{F} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_R = \vec{\gamma}_R(M),$$

si \vec{F} est la résultante des forces appliquées au système ponctuel M de masse m dans le référentiel d'inertie R .

Pour un référentiel non galiléen R_m (en mouvement non rectiligne uniforme), la deuxième loi de *Newton* est encore valable si, à la résultante \vec{F} , sont ajoutées les forces d'inertie (d'entraînement et de Coriolis) :

$$\vec{F} - m\vec{\gamma}_{ent} - m\vec{\gamma}_{Coriolis} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{R_m}.$$

Le mouvement est donc toujours relatif puisque sa description est liée à un système de référence particulier choisi par l'observateur. On peut alors se demander comment peuvent être reliées entre elles des observations faites par des observateurs différents. Si l'expérience quotidienne nous enseigne qu'un objet ne peut avoir la même vitesse par rapport à deux observateurs en mouvement relatif, cette constatation ne s'applique pas à la vitesse de la lumière qui est la même dans n'importe quel référentiel. Ce paradoxe fut résolu en 1905 par *Einstein* qui exposa son principe de relativité : « toutes les lois de la nature doivent être les mêmes pour tout observateur en mouvement relatif uniforme de translation ». Cette affirmation implique que le temps lui même n'est plus une grandeur absolue (indépendante du référentiel choisi) mais dépend également du système de référence de l'observateur. En effet, si la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel, la vitesse étant définie par le rapport de la distance parcourue au temps mis pour parcourir cette distance, la

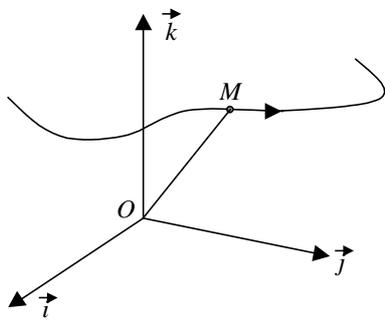
¹ Etude des mouvements des corps indépendamment des causes qui les produisent.

grandeur « temps » doit être modifiée si le quotient des deux reste invariant. Ainsi, l'intervalle de temps entre deux événements n'est pas le même pour deux observateurs en mouvement relatif (concept de simultanéité). Néanmoins, lorsque les deux observateurs sont en mouvement relatif avec une vitesse relative faible devant celle de la lumière, l'hypothèse de l'invariance du temps (indépendant du référentiel) est une très bonne approximation.

Dans la suite de ce cours, nous ferons l'hypothèse du temps absolu (il existe un temps absolu t dont la définition est indépendante du référentiel de l'observateur). R désignera le référentiel lié à l'observateur, supposé galiléen et rapporté à un repère d'espace orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

II RAPPELS

1. Vitesse, Accélération d'un point matériel



Le point M est repéré dans R par le vecteur \overrightarrow{OM} .

Si à l'instant t le point M est en A et à $t' = t + \Delta t$ M est en A' , par définition, la vitesse du point M dans le référentiel R est (attention à la notation):

$$\vec{V}_R(M) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

La vitesse est indépendante du choix du point fixe O et tangente à la trajectoire.

De même, l'accélération du point M dans le référentiel R est définie par :

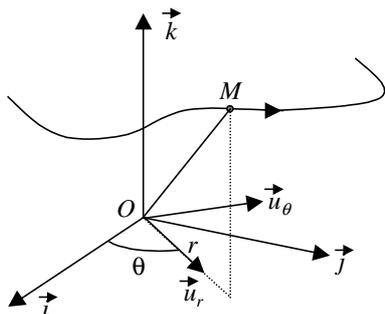
$$\vec{\gamma}_R(M) = \frac{d\vec{V}_R(M)}{dt}.$$

Avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{V}_R(M) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \vec{\gamma}_R(M) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

La vitesse et l'accélération sont donc définies par rapport à un système d'axes liés à un observateur. Néanmoins, une fois ces deux grandeurs vectorielles définies, rien n'empêche d'exprimer leurs composantes dans d'autres repères d'espace.

Exemple : coordonnées cylindriques (rappel)



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$$

$$\vec{V}_R(M) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_R(M) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

2. Mouvement relatif de deux référentiels

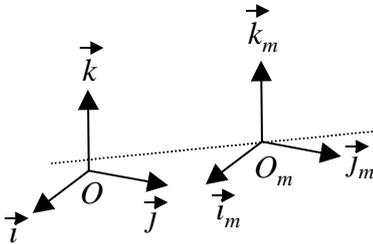
Soit R_m un deuxième référentiel muni d'un système d'axes orthonormés $(O_m, \vec{i}_m, \vec{j}_m, \vec{k}_m)$, en mouvement dans R .

2.1. Mouvement de translation

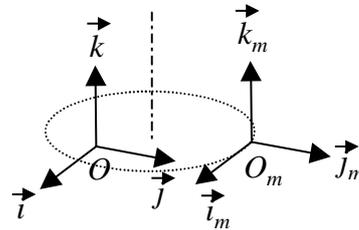
R_m est en *translation* dans R si la trajectoire de O_m est quelconque mais les vecteurs de la base mobile gardent une direction fixe dans R au cours du temps :

$$\left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{k}_m}{dt} \right)_R = \vec{0}.$$

Exemples :



Si la trajectoire de O_m est une droite, R_m est en translation rectiligne dans R .



Si la trajectoire de O_m est un cercle, R_m est en translation circulaire dans R .

Tous les points du référentiel mobile (qui sont fixes dans R_m) ont, dans R , des trajectoires identiques : toutes ces trajectoires sont superposables à une trajectoire unique, par exemple, celle de O_m .

Si de plus l'accélération de O_m dans R est constante, le repère mobile est en *translation uniforme* dans le référentiel R .

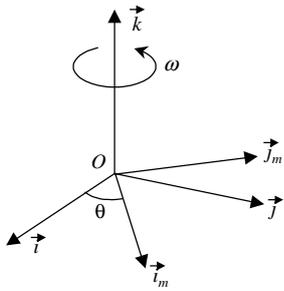
2.2. Mouvement de rotation

Lorsque le repère mobile R_m tourne autour d'un axe Δ de R , la vitesse dans R de n'importe quel point fixe A_m de R_m est caractérisée par la connaissance du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{R_m/R}$ de R_m dans R et par la position de A_m :

$$\vec{V}_R(A_m) = \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \overrightarrow{OA_m}.$$

Sans nuire à la généralité de la démonstration, les origines des deux référentiels sont supposées confondues ($O_m = O$) : R_m est donc en rotation dans R autour de O .

Afin de simplifier la démonstration, considérons le cas particulier où R_m est en rotation dans R autour de l'axe Ok ($\vec{k}_m = \vec{k}$).



$$\overrightarrow{OA_m} = x_{Am} \vec{i}_m + y_{Am} \vec{j}_m + z_{Am} \vec{k}$$

$$\vec{V}_R(A_m) = x_{Am} \left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R + y_{Am} \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R + z_{Am} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_R \quad \text{puisque } A_m \text{ est fixe dans } R_m.$$

$$\vec{i}_m = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{j}_m = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Ainsi

$$\left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R = -\sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{i} + \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{j} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{j}_m,$$

$$\left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R = -\cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{i} - \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{j} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) = -\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{i}_m.$$

Donc $\vec{V}_R(A_m) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R [x_{Am} \vec{j}_m - y_{Am} \vec{i}_m]$

Cependant : $\vec{j}_m = \vec{k} \wedge \vec{i}_m$ et $-\vec{i}_m = \vec{k} \wedge \vec{j}_m$,

d'où $\vec{V}_R(A_m) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R [x_{Am} \vec{k} \wedge \vec{i}_m + y_{Am} \vec{k} \wedge \vec{j}_m]$.

En posant $\vec{\Omega}_{Rm/R} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{k}$ l'expression de la vitesse de A_m dans R s'exprime simplement par :

$$\vec{V}_R(A_m) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_R \vec{k} \wedge [x_{Am} \vec{i}_m + y_{Am} \vec{j}_m + z_{Am} \vec{k}] \quad \text{puisque } \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{V}_R(A_m) = \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \overrightarrow{OA_m}}$$

$\vec{\Omega}_{Rm/R}$ caractérise donc bien la rotation du repère mobile dans le référentiel R . Par définition $\vec{\Omega}_{Rm/R}$ est le vecteur rotation instantané de R_m dans R (attention à la notation).

L'exemple ci-dessus s'élargit au cas général où l'orientation de l'axe Δ est quelconque. La démonstration de l'existence du vecteur $\vec{\Omega}_{Rm/R}$ est reportée dans l'annexe A.

2.3. Mouvement hélicoïdal

Un mouvement hélicoïdal d'axe Δ est la combinaison d'un mouvement de translation rectiligne parallèlement à l'axe Δ et d'un mouvement de rotation autour de Δ (ex. mouvement d'une charge dans un champ magnétique).

Remarque : le mouvement le plus quelconque de R_m dans R peut toujours se décomposer, à l'instant t , comme la composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation autour de la direction de translation (cf. § champ des vitesse dans un solide).

2.4. Dérivation dans un repère mobile

Si $\vec{u}(t)$ est une grandeur physique vectorielle dépendant du temps (ex. la vitesse d'un point M), quelle est la relation entre $\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$ dans R et dans R_m notée respectivement $\left(\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right)_R$ et $\left(\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right)_{R_m}$?

Soit $\vec{u}(t) = u_{xm} \vec{i}_m + u_{ym} \vec{j}_m + u_{zm} \vec{k}$.

$$\left(\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right)_R = \left(\frac{du_{xm}}{dt}\right)_R \vec{i}_m + u_{xm} \left(\frac{d\vec{i}_m}{dt}\right)_R + \left(\frac{du_{ym}}{dt}\right)_R \vec{j}_m + u_{ym} \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt}\right)_R + \left(\frac{du_{zm}}{dt}\right)_R \vec{k}$$

Si $\vec{\Omega}_{R_m/R}$ désigne le vecteur rotation de R_m dans R ,

$$\left(\frac{d\vec{i}_m}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \vec{i}_m \quad \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \vec{j}_m \quad \left(\frac{d\vec{k}_m}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \vec{k}_m \quad (\text{cf. Annexe A}).$$

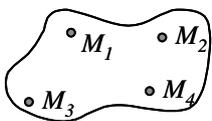
$$\left(\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right)_R = \left(\frac{du_{xm}}{dt}\right)_R \vec{i}_m + \left(\frac{du_{ym}}{dt}\right)_R \vec{j}_m + \left(\frac{du_{zm}}{dt}\right)_R \vec{k} + u_{xm} \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \vec{i}_m + u_{ym} \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \vec{j}_m$$

$$\text{soit } \boxed{\left(\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right)_R = \left(\frac{du_{xm}}{dt}\right)_{R_m} + \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \vec{u}(t)}.$$

III CINEMATIQUE DU SOLIDE

1. Définition du solide

Dans ce cours, nous nous intéresserons uniquement au solide indéformable. Un solide sera donc un corps assez dur pour que les déformations qu'il pourrait subir soient imperceptibles ; la forme du corps ne dépendra donc pas des actions exercées sur lui.



Si M_1, M_2, M_3 et M_4 sont quatre points quelconque du solide, la définition du solide indéformable se traduit mathématiquement par l'une des deux relations suivantes :

$$\left| \overline{M_1 M_2} \right| \text{ est indépendante du temps,}$$

$$\overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_3 M_4} = cte.$$

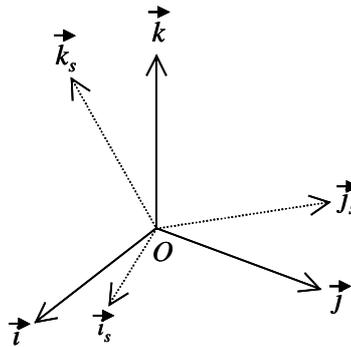
2. Degrés de liberté d'un solide

Afin de décrire le mouvement d'un solide dans un référentiel donné, il convient de pouvoir préciser sa position et son orientation dans l'espace au moyen de paramètres physiques appropriés. Ces paramètres ont appelés *degrés de liberté du solide*.

Soit $R_s = (O_s, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$ un repère lié au solide. Préciser la position et l'orientation du solide dans R revient à préciser la position et l'orientation du référentiel R_s lié au solide.

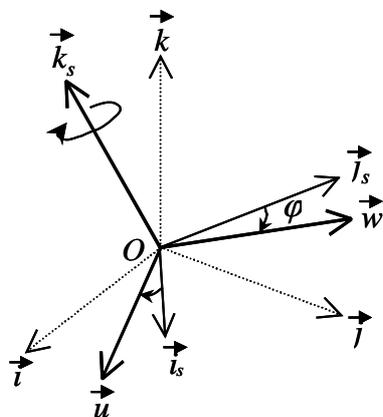
La position est donnée par les coordonnées de O_s dans R : x_s , y_s et z_s (en pratique, O_s est souvent confondu avec le centre de gravité du solide).

L'orientation du solide sera quant à elle donnée par l'orientation de la base $(\vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Pour simplifier, les origines O et O_s des deux référentiels sont supposées confondues (ce qui n'enlève rien à la généralité du passage de l'orientation d'une base à une autre).

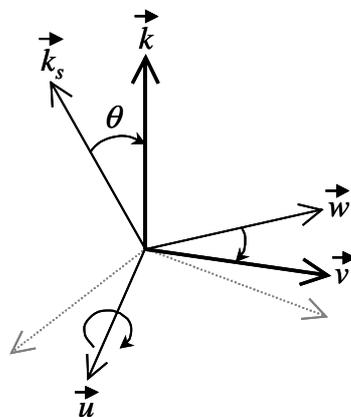
3 paramètres angulaires sont nécessaires : les *angles d'Euler*, associés à 3 rotations successives qui permettent de superposer la base $(\vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$ sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ces trois rotations sont détaillées sur les figures ci-dessous.



φ rotation propre,

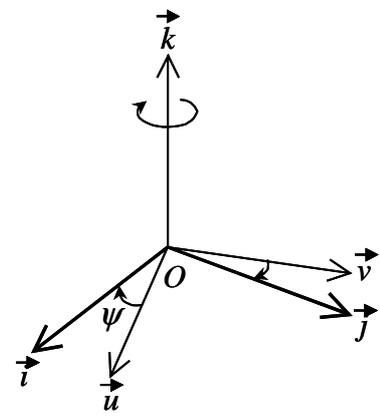
afin d'amener le vecteur \vec{i}_s dans le plan (\vec{i}, \vec{j}) .

La direction de \vec{u} définit la *ligne des nœuds* : intersection d'un plan perpendiculaire à \vec{k}_s avec le plan horizontal (\vec{i}, \vec{j}) .



θ nutation

afin d'amener \vec{k}_s en coïncidence avec \vec{k} . De plus \vec{v} est dans le plan horizontal (\vec{i}, \vec{j}) .



ψ précession

afin d'amener \vec{u} en coïncidence avec \vec{i} et \vec{v} avec \vec{j} .

Ainsi, dans le cas général, le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour préciser la position et l'orientation du solide dans le référentiel R est égal à 6 : 3 paramètres de position et 3 paramètres d'orientation.

Une autre approche possible permettant de dénombrer le nombre de paramètres nécessaire à la définition de la position et de l'orientation d'un solide est la suivante :

- la position d'un point quelconque du solide (O_s) est déterminée par ses coordonnées dans R (3 paramètres),
- soit A un second point du solide : lorsque le point O_s est fixé dans R , A peut encore se mouvoir autour de O_s : il décrit alors la surface d'une sphère de rayon $|\overline{O_s A}|$. Il faut donc deux paramètres supplémentaires pour déterminer la position de A sur cette surface.
- lorsque les positions de O_s et A sont fixées, le solide peut encore tourner autour de l'axe joignant ces deux points. Il suffit donc d'un dernier paramètre pour caractériser l'angle de cette rotation.

Finalement le nombre de paramètres nécessaires pour préciser la position et l'orientation du solide dans R est encore de $3+2+1 = 6$.

Remarque : Si le mouvement du solide est restreint par une liaison, le nombre de degrés de liberté est alors inférieur à 6. Par exemple, un solide en rotation autour d'un axe fixe ne possède qu'un seul degré de liberté (l'angle de rotation autour de cet axe).

3. Distribution des vitesses dans un solide

Puisque les points d'un solide sont à des distances fixes les uns par rapport aux autres, la connaissance de la vitesse, dans un référentiel donné, de l'un d'entre eux, doit permettre de déterminer la vitesse de n'importe quel autre point du solide.

Soit $R_s = (O_s, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$ un référentiel lié à un solide S en mouvement dans le référentiel galiléen R . Soit A et B deux points quelconque du solide.

$$\left(\frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overline{OB}}{dt} \right)_R - \left(\frac{d\overline{OA}}{dt} \right)_R = \vec{V}_R(B) - \vec{V}_R(A)$$

D'autre part

$$\left(\frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overline{AB}}{dt} \right)_{R_s} + \vec{\Omega}_{R_s/R} \wedge \overline{AB}$$

où $\vec{\Omega}_{R_s/R}$ est le vecteur rotation instantané du solide S dans le référentiel R .

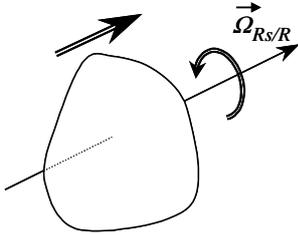
Ainsi, la relation cherchée entre la vitesse de deux points quelconques d'un même solide s'écrit :

$$\boxed{\vec{V}_R(B) = \vec{V}_R(A) + \vec{\Omega}_{R_s/R} \wedge \overline{AB}}$$

qui constitue la relation de distribution du champ des vitesses dans un solide. La connaissance du vecteur $\vec{\Omega}_{R_s/R}$ est donc essentielle à la caractérisation du champ des vitesses dans un solide.

Remarque 1 : au sens strict du terme, parler de « vitesse du solide » n'a pas de sens puisque chaque point du solide a une vitesse qui lui est propre. Par abus de langage, on désignera cependant par « vitesse du solide », la vitesse de son centre de masse.

Remarque 2 : La relation du champ des vitesses dans un solide permet également de décomposer le mouvement à l'instant t du solide en une composante translatrice (le long de la direction de $\vec{\Omega}_{Rs/R}$) et d'une composante rotatoire (autour de la direction de $\vec{\Omega}_{Rs/R}$). La démonstration est donnée dans l'annexe B.



Ainsi, tous les points du solide situés à l'instant t sur l'axe de rotation instantanée sont en translation dans le référentiel d'étude.

4. Mouvements plans d'un solide

4.1. Définition

Par définition, le mouvement d'un solide est dit *mouvement plan* si tous les points qui le constituent ont des trajectoires planes et contenues dans des plans parallèles.

L'étude d'un tel mouvement peut donc se restreindre à l'étude d'une « tranche » de solide contenue dans le plan du mouvement. La section choisie est généralement celle qui passe par le centre de masse.

Remarque : le choix du référentiel fixe d'étude est immédiat (deux vecteurs de base définissant le plan du mouvement, par exemple \vec{i} et \vec{j}). Ainsi, dans un tel référentiel, le vecteur rotation instantanée ne peut être que perpendiculaire au plan du mouvement, donc porté par l'axe $O\vec{k}$.

Le tableau de la page suivante présente quelques exemples de mouvements-plans.

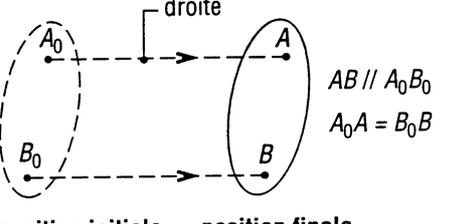
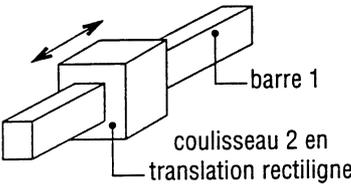
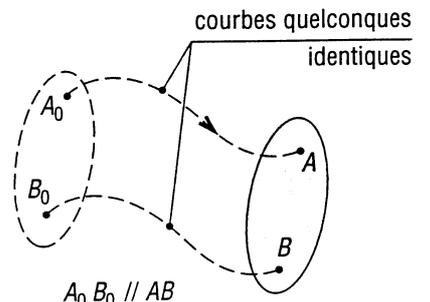
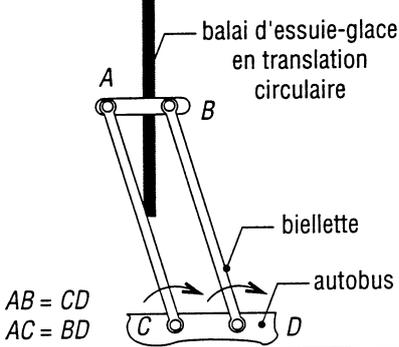
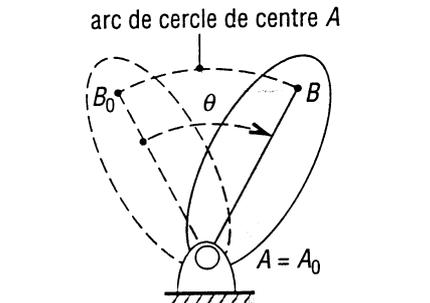
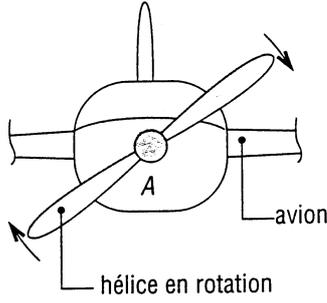
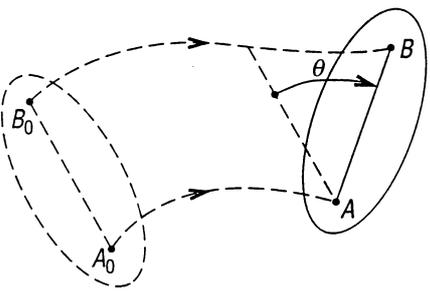
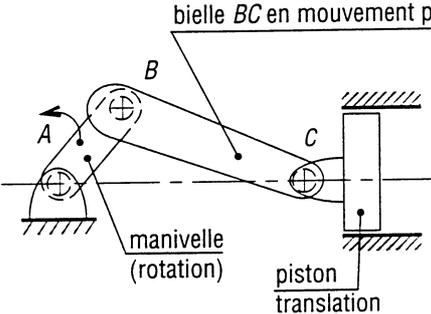
4.2. Centre Instantané de Rotation (CIR)

Compte tenu de la remarque du paragraphe précédent concernant la direction du vecteur instantané de rotation, par définition, le *Centre Instantané de Rotation* (donc à un instant t donné) est l'unique point I de la section π du solide retenue pour l'étude de son mouvement, telle que $\vec{V}_R(I) = \vec{0}$. A un instant t' plus tard, le CIR correspond à un autre point I' .

$$\text{Si } M \text{ est un point quelconque de la section } \pi : \vec{V}_R(M) = \vec{V}_R(I) + \vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{IM}$$

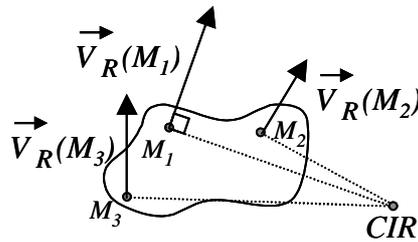
Le point M (et par extension, le solide) est bien en rotation autour de I .

Résumé des principaux types de mouvements plans

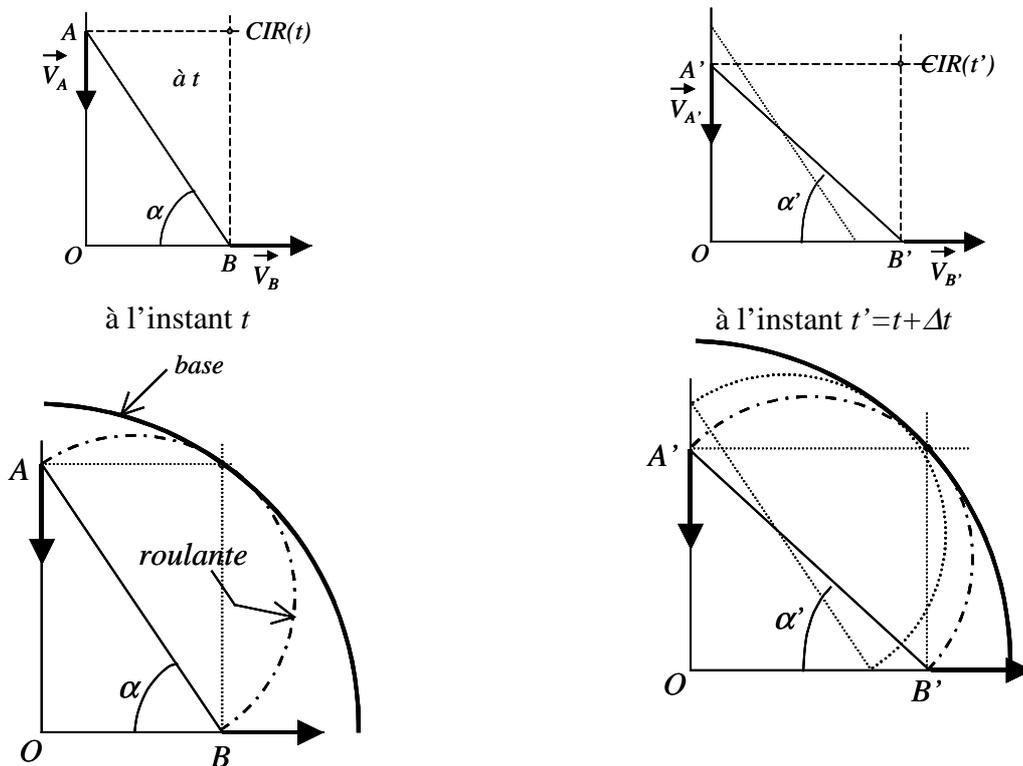
Mouvements	Propriétés	Exemple
Translation rectiligne	 <p style="text-align: center;">position initiale position finale</p>	 <p style="text-align: right;">barre 1 coulisseau 2 en translation rectiligne</p>
Translation curviligne		 <p style="text-align: right;">balai d'essuie-glace en translation circulaire bielle autobus $AB = CD$ $AC = BD$</p>
Rotation (d'axe fixe)		 <p style="text-align: right;">hélice en rotation avion</p>
Mouvement plan général		 <p style="text-align: right;">bielle BC en mouvement plan manivelle (rotation) piston translation</p>

Cette dernière relation donne une construction géométrique pour déterminer la position du CIR.

$\vec{V}_R(M) = \vec{\Omega}_{R_3/R_2} \wedge \overline{IM}$: le CIR est à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesses du solide, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Exemple : échelle contre un mur : variation de la position du CIR au cours du mouvement.



La « base » définit la trajectoire du CIR dans le référentiel fixe. La « roulante » définit la trajectoire du CIR dans un référentiel lié au système (l'échelle dans l'exemple ci-dessus). A chaque instant, ces deux courbes sont tangentes en un point.

IV COMPOSITION DES MOUVEMENTS (Changement de référentiel)

Soit un solide S_3 (référentiel lié R_3) en mouvement par rapport à un solide S_2 (référentiel lié R_2) lui-même en mouvement par rapport à un solide S_1 (référentiel lié R_1). Le mouvement de S_3 par rapport à S_1 est le composé des deux mouvements précédents.

Ce paragraphe a pour objectif de rappeler les expressions liant les grandeurs cinématiques exprimées dans des référentiels différents.

1. Point coïncident

Soit M un point matériel mobile dans le référentiel R et dans un référentiel mobile R_m .

La trajectoire de M dans R_m est l'ensemble des positions occupées par le point M dans le référentiel mobile. Ainsi, à chaque instant, le point matériel M est en coïncidence avec un point fixe de R_m .

2. Composition des vitesses

Soit R_m un deuxième référentiel muni d'un système d'axes orthonormés $(O_m, \vec{i}_m, \vec{j}_m, \vec{k}_m)$, en mouvement dans R . Soit M un point matériel en mouvement dans chacun des deux référentiels.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_m} + \overrightarrow{O_mM}$$

$$\vec{V}_R(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_m}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O_mM}}{dt} \right)_R$$

En utilisant la formule de dérivation dans des repères mobiles :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_mM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O_mM}}{dt} \right)_{R_m} + \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \overrightarrow{O_mM}.$$

Dans l'expression $\vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \overrightarrow{O_mM}$, $\vec{\Omega}_{R_m/R}$ est le vecteur rotation instantanée de R_m dans R et M le point coïncident de R_m .

$$\text{Ainsi : } \vec{V}_R(M) = \vec{V}_{R_m}(M) + \vec{V}_R(O_m) + \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \overrightarrow{O_mM}$$

$$\text{soit } \vec{V}_R(M) = \vec{V}_{R_m}(M) + \vec{V}_e(M)$$

$$\text{où } \vec{V}_e(M) = \vec{V}_R(O_m) + \vec{\Omega}_{R_m/R} \wedge \overrightarrow{O_mM}.$$

Remarque : la vitesse d'entraînement du point M est la vitesse dans R , à l'instant t , du point coïncident de R_m (autrement dit, d'un point fixe de R_m avec lequel M coïncide à l'instant t). R_m peut être également considéré comme un référentiel lié à un solide en mouvement dans R . Ainsi, l'expression de la vitesse d'entraînement du point M résulte directement de l'application de la formule du champ des vitesses dans un solide, qui donne l'expression de la vitesse d'un point du solide (celle du point coïncident avec M , à l'instant t) en fonction de celle d'un autre point (O_m).

La formule de composition des vitesses est donc :

$$\boxed{\vec{V}_{absolue}(M) = \vec{V}_{relative}(M) + \vec{V}_{entraînement}(M)}$$

si $\vec{V}_{absolue}(M)$ désigne la vitesse du point M dans le référentiel fixe, $\vec{V}_{relative}(M)$ sa vitesse dans le référentiel mobile et $\vec{V}_{entraînement}(M) = \vec{V}_e(M)$.

3. Composition des accélérations

L'expression de la composition des accélérations se déduit immédiatement en appliquant la formule de dérivation dans des repères en mouvement relatif à la loi de composition des vitesses.

Ainsi :

$$\vec{\gamma}_{absolue}(M) = \vec{\gamma}_{relative}(M) + \vec{\gamma}_{Coriolis}(M) + \vec{\gamma}_{entraînement}(M)$$

$$\text{avec : } \vec{\gamma}_{absolue}(M) = \left(\frac{d\vec{V}_R(M)}{dt} \right)_R \quad \vec{\gamma}_{relative}(M) = \left(\frac{d\vec{V}_{Rm}(M)}{dt} \right)_{Rm}$$

$$\vec{\gamma}_{Coriolis}(M) = 2\vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{V}_{Rm}(M)$$

$$\vec{\gamma}_{entraînement}(M) = \vec{\gamma}_R(O_m) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{Rm/R}}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{O_m M} + \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge (\vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \overrightarrow{O_m M})$$

Remarque : champ des accélérations dans un solide.

En considérant un solide lié au référentiel R_m , avec $O_m = A$ et $M = B$ deux points quelconques du solide (donc immobiles dans R_m) et en appliquant la loi de composition des accélérations, il vient,

avec $\left(\frac{d\vec{V}_{Rm}(B)}{dt} \right)_{Rm} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{Rm/R}$ la vitesse angulaire du solide dans R :

$$\vec{\gamma}_R(B) = \vec{\gamma}_R(A) + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{Rm/R}}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge (\vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \overrightarrow{AB})$$

qui donne la relation entre les accélérations de deux points quelconques du solide.

4. Composition des vecteurs rotations instantanées

Soit A et B deux points quelconques d'un solide S (référentiel lié R_s) en mouvement dans R et R_m .

$$\vec{V}_R(A) = \vec{V}_{Rm}(A) + \vec{V}_e(A) \text{ où } \vec{V}_e(A) = \vec{V}_R(O_m) + \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \overrightarrow{O_m A}, \text{ avec des expressions identiques pour } B.$$

De plus $\vec{V}_R(B) = \vec{V}_R(A) + \vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{AB}$ où $\vec{\Omega}_{Rs/R}$ désigne le vecteur rotation instantanée de S dans R .

De même $\vec{V}_{Rm}(B) = \vec{V}_{Rm}(A) + \vec{\Omega}_{Rs/Rm} \wedge \overrightarrow{AB}$ où $\vec{\Omega}_{Rs/Rm}$ désigne le vecteur rotation instantanée de S dans R_m .

Ainsi, par soustraction membre à membre des deux égalités ci-dessus :

$$\vec{V}_e(B) = \vec{V}_e(A) + (\vec{\Omega}_{Rs/R} - \vec{\Omega}_{Rs/Rm}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\text{donc } \vec{V}_e(B) - \vec{V}_e(A) = \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge (\overrightarrow{O_m B} - \overrightarrow{O_m A}) = \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \overrightarrow{AB} = (\vec{\Omega}_{Rs/R} - \vec{\Omega}_{Rs/Rm}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

quelques soient les points A et B d'où :

$$\vec{\Omega}_{Rs/R} = \vec{\Omega}_{Rs/Rm} + \vec{\Omega}_{Rm/R},$$

soit :

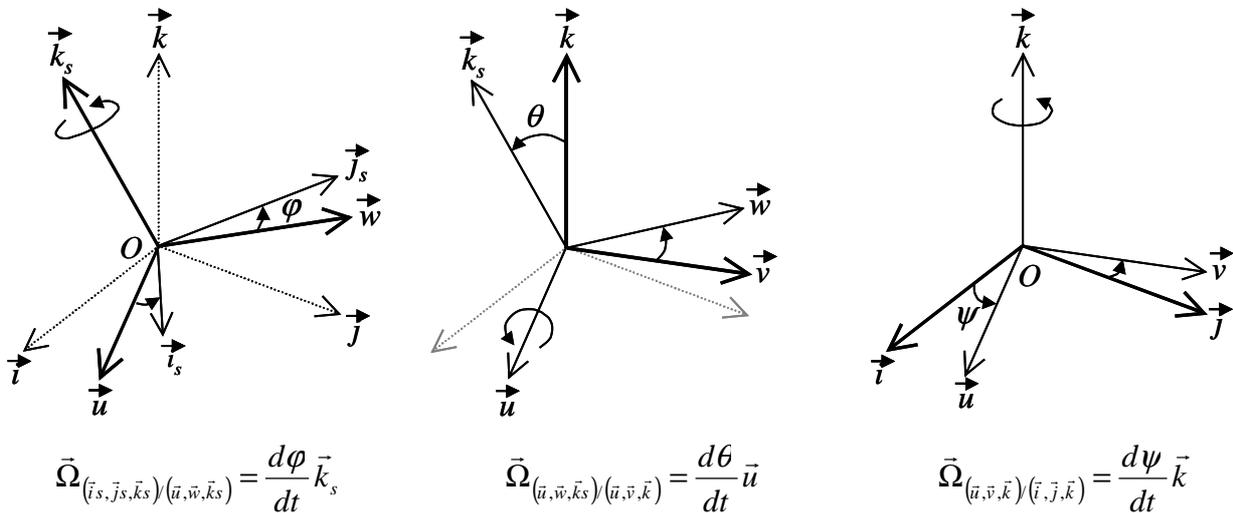
$$\boxed{\vec{\Omega}_{absolu} = \vec{\Omega}_{relatif} + \vec{\Omega}_{entraînement}}$$

avec $\vec{\Omega}_{absolu} = \vec{\Omega}_{Rs/R}$, $\vec{\Omega}_{relatif} = \vec{\Omega}_{Rs/Rm}$ et $\vec{\Omega}_{entraînement} = \vec{\Omega}_{Rm/R}$.

Cette expression permet ainsi de décomposer la vitesse angulaire d'un solide en une somme de vecteurs rotations instantanées autour d'axes connus.

Exemple : expression du vecteur rotation en fonction des angles d'Euler :

En reprenant les notations du paragraphe III.2 :



Attention au signe des vitesses angulaires, qui correspond ici à une orientation des angles dans le sens trigonométrique.

Ainsi :

$$\vec{\Omega}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_s) / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \vec{\Omega}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_s) / (\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_s)} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k}_s) / (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})} + \vec{\Omega}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

donc

$$\vec{\Omega}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_s) / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}_s + \frac{d\theta}{dt} \vec{u} + \frac{d\psi}{dt} \vec{k}.$$

Afin d'exprimer les composantes de $\vec{\Omega}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_s) / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$ dans un référentiel particulier, il suffit de déterminer les composantes des vecteurs unitaires dans le référentiel souhaité.

On pourra ainsi vérifier les expressions suivantes :

dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

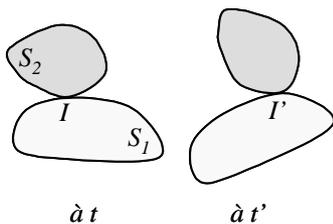
$$\vec{\Omega}_{R_s/R} \begin{vmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\varphi \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{vmatrix}$$

dans la base $(O, \vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$:

$$\vec{\Omega}_{R_s/R_s} \begin{vmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

V MOUVEMENT DE DEUX SOLIDES EN CONTACT

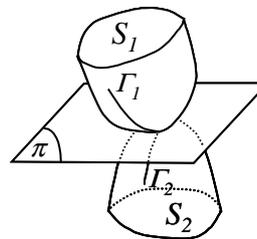
Soit un solide S_1 (référentiel lié R_1) en mouvement par rapport à un solide S_2 (référentiel lié R_2) tel que S_1 et S_2 soient en contact à tout instant. Le contact entre les deux solides est supposé ponctuel en un point I . Le mouvement de S_1 et S_2 est étudié dans le référentiel R supposé galiléen.



En I coïncide à l'instant t , un point I_1 appartenant à S_1 et un point I_2 appartenant à S_2 .

A l'instant t' plus tard, le nouveau point géométrique de contact est I' avec lequel coïncide un nouveau point I_1' de S_1 et un nouveau point I_2' de S_2 .

L'ensemble des points de S_1 (S_2) qui vont entrer en cours du mouvement décrivent une courbe Γ_1 (Γ_2)



contact avec S_2 (S_1) au inscrite sur S_1 (S_2).

1. Vitesse de glissement

Par définition, la *vitesse de glissement* de S_1 par rapport à S_2 est :

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{V}_{R_2}(I_1)$$

Autrement dit, la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 est définie par la vitesse, dans un référentiel lié à S_2 , du point I_1 de S_1 en coïncidence avec le point de contact I entre S_1 et S_2 à l'instant t . En abrégé, on pourra également noter

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{V}_{R_2}(I \in S_1)$$

D'après la loi de composition des vitesses,

$$\vec{V}_R(I_1) = \vec{V}_{R_2}(I_1) + \vec{V}_e(I_1) = \vec{V}_{R_2}(I_1) + \vec{V}_R(I_2)$$

puisque I_2 est un point fixe du référentiel R_2 lié à S_2 et qu'à l'instant t : $I_1 = I_2 = I$.

Ainsi

$$\boxed{\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{V}_R(I_1) - \vec{V}_R(I_2) = \vec{V}_R(I \in S_1) - \vec{V}_R(I \in S_2)}$$

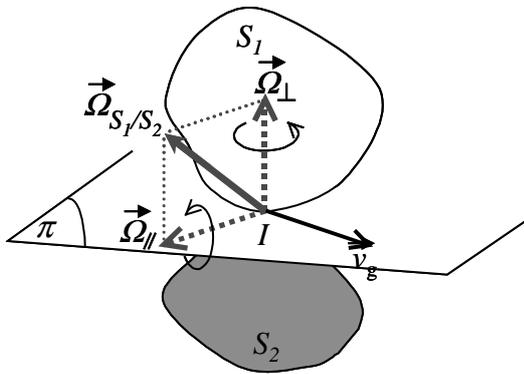
Soit π le plan tangent en I aux deux solides à l'instant t . Puisque les deux solides restent en contact permanent (pas d'interpénétration ni d'écartement de S_1 par rapport à S_2), $\vec{V}_R(I_1)$ et $\vec{V}_R(I_2)$ appartiennent nécessairement au plan tangent. La vitesse de glissement est donc contenue dans le plan tangent aux deux solides à l'instant t .

2. Roulement, pivotement

Soit M_1 un point de S_1 . A l'instant t : puisque $I_1 = I_2 = I$

$$\vec{V}_R(M_1) = \vec{V}_R(I_1) + \vec{\Omega}_{S_1/R} \wedge \overrightarrow{I_1M_1} = \vec{V}_R(I_1) + \vec{\Omega}_{S_1/R} \wedge \overrightarrow{IM_1}$$

$$\vec{V}_{R_2}(M_1) = \vec{V}_{R_2}(I_1) + \vec{\Omega}_{S_1/R_2} \wedge \overrightarrow{IM_1} = \vec{v}_g(S_1/S_2) + \vec{\Omega}_{S_1/R_2} \wedge \overrightarrow{IM_1}$$



Si le vecteur rotation instantanée de S_1 par rapport à S_2 est décomposé en une composante normale $\vec{\Omega}_\perp$ et une composante parallèle $\vec{\Omega}_\parallel$ au plan tangent en I aux deux solides,

$$\vec{V}_{R_2}(M_1) = \vec{v}_g(S_1/S_2) + \vec{\Omega}_\parallel \wedge \overrightarrow{I_1M_1} + \vec{\Omega}_\perp \wedge \overrightarrow{I_1M_1}$$

La signification physique des deux derniers termes est immédiate :

$\vec{\Omega}_\parallel \wedge \overrightarrow{I_1M_1}$ définit la *vitesse de roulement* de M_1 dans R_2 ,

$\vec{\Omega}_\perp \wedge \overrightarrow{I_1M_1}$ définit la *vitesse de pivotement* de M_1 dans R_2 .

On peut récapituler les différents types de mouvement de deux solides en contact (ponctuel) permanent :

	$\vec{\Omega}_\parallel = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_\perp = \vec{0}$	$\vec{\Omega}_\parallel \neq \vec{0}$ $\vec{\Omega}_\perp = \vec{0}$	$\vec{\Omega}_\parallel = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_\perp \neq \vec{0}$	$\vec{\Omega}_\parallel \neq \vec{0}$ $\vec{\Omega}_\perp \neq \vec{0}$
$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$	<i>adhérence</i>	<i>roulement</i>	<i>pivotement</i>	<i>roulement avec pivotement</i>
$\vec{v}_g(S_1/S_2) \neq \vec{0}$	<i>glissement</i>	<i>roulement avec glissement</i>	<i>roulement avec pivotement</i>	<i>roulement et pivotement avec glissement</i>

3. Condition de non glissement

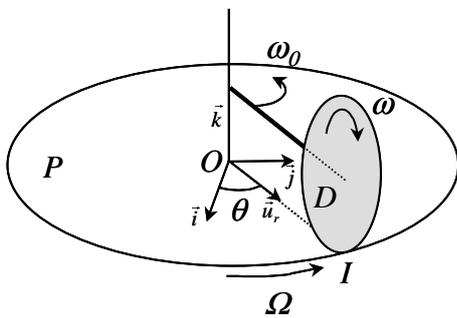
D'après le tableau précédent, le solide S_1 se déplace sans glisser sur le solide S_2 si à tout instant

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{0} \text{ donc } \vec{V}_R(I \in S_1) = \vec{V}_R(I \in S_2).$$

Exemple d'application : mise en rotation d'un plateau

Soit le dispositif illustré sur la figure ci-dessous. Le disque D , de centre C , de rayon r roule sans glisser sur le plateau circulaire P de rayon R . Le plateau P tourne autour de son axe vertical à la vitesse angulaire Ω . Soit ω la vitesse angulaire de rotation du disque autour de son axe. Ce dernier est parallèle au plan du plateau. Soit ω_0 la vitesse angulaire de rotation de l'axe du disque autour de l'axe vertical.

Quelle relation existe-t-il entre ces diverses vitesses angulaires ?



$R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ définit le référentiel fixe d'étude supposé galiléen. Soit I le point de contact entre le disque et le plateau.

Soit $R_m = (O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ le référentiel lié à l'axe du disque tel que $\vec{OI} = R\vec{u}_r$. R_m est en rotation dans R autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire ω_0 .

Soit respectivement I_D et I_P les points du disque et du plateau en coïncidence avec I à l'instant t .

Puisque le roulement du disque sur le plateau se fait sans glissement :

$$\vec{v}_g(D/P) = \vec{0} \text{ soit } \vec{V}_R(I_D) = \vec{V}_R(I_P).$$

D'autre part :

$$\vec{V}_R(I_D) = \vec{V}_R(C) + \vec{\Omega}_{D/R} \wedge \vec{CI}_D \text{ avec } \vec{\Omega}_{D/R} = \vec{\Omega}_{D/R_m} + \vec{\Omega}_{R_m/R} = -\omega\vec{u}_r + \omega_0\vec{k}$$

$$\vec{V}_R(C) = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{OC}$$

et

$$\vec{V}_R(I_P) = \vec{\Omega}_{P/R} \wedge \vec{OI}_P = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = R\Omega \vec{u}_\theta$$

D'où :

$$\vec{V}_R(I_D) = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{OC} + (-\omega\vec{u}_r + \omega_0\vec{k}) \wedge \vec{CI}_D = \omega_0 R \vec{u}_\theta - \omega\vec{u}_r \wedge (-r)\vec{k} = (R\omega_0 - r\omega)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{V}_R(I_D) = (R\omega_0 - r\omega)\vec{u}_\theta = \vec{V}_R(I_P) = R\Omega \vec{u}_\theta$$

Finalement

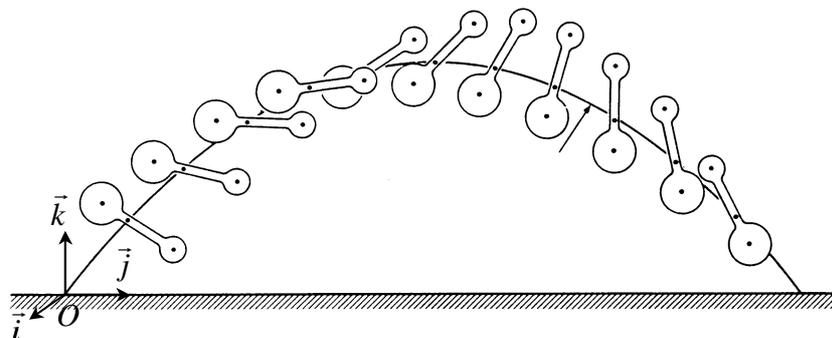
$$\omega = \frac{R}{r}(\omega_0 - \Omega)$$

qui constitue la relation cherchée : plus le disque a un rayon petit, plus sa vitesse de rotation sera grande. Si l'axe de rotation du disque tourne à la même vitesse angulaire que le plateau, le disque ne tourne pas sur lui même !

CINETIQUE

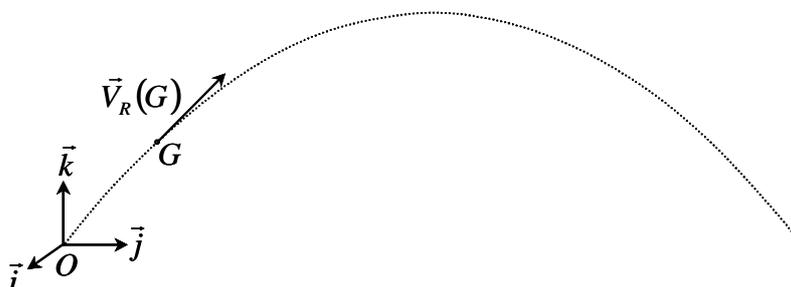
Afin de comprendre l'origine du mouvement d'un système, il faut préalablement s'intéresser à des grandeurs physiques qui caractérisent le mouvement du système dans son ensemble.

L'exemple ci-dessous illustre la problématique liée à la caractérisation du mouvement d'un système quelconque, en particulier, celui d'un solide indéformable.



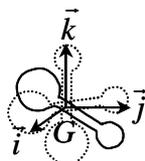
Le référentiel R d'étude est supposé galiléen. L'étude du mouvement de l'objet peut être conduite en deux temps. Remarquons que cette décomposition s'applique pour le mouvement le plus général d'un système quelconque.

- i) l'étude du mouvement du centre de gravité G (centre de masse) dans le référentiel R :



Le système est alors assimilé à un point matériel (son centre de masse) affecté de la masse totale du système. Dans l'exemple ci-dessus, la trajectoire de G est celle d'un point matériel soumis au champ de la pesanteur : une trajectoire parabolique.

- ii) L'étude du mouvement du système autour de son centre de masse :



Le mouvement du système dans le référentiel $R_B = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (origine au centre de masse) est un mouvement de rotation autour du point G .

Pour l'étude du mouvement du système assimilé à son centre de masse, donc pour l'étude du mouvement d'un point matériel G dans un référentiel (galiléen), la deuxième loi de Newton postule

la relation entre la variation de la vitesse du point matériel G en fonction de la résultante des forces \vec{F} qui s'y appliquent :

$$\vec{F} = m \left(\frac{d\vec{V}_R(M)}{dt} \right)_R$$

Ainsi, cette loi définit la masse m du point matériel M , grandeur intrinsèque du système, qui traduit sa « facilité » de réaction (son inertie) à l'application de la force \vec{F} .

La grandeur vectorielle $\vec{p} = m\vec{V}_R(M)$ ou *quantité de mouvement*, caractérise de manière plus globale le mouvement du point matériel puisqu'elle tient également compte de la vitesse de ce dernier. La deuxième loi de Newton $\vec{F} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_R$ précise donc le lien entre un changement dans le mouvement du point matériel (une variation de sa quantité de mouvement) et l'origine de ce changement (la force \vec{F}).

Par rapport à la mécanique du point matériel, la principale « nouveauté » dans l'étude du mouvement d'un système quelconque réside donc dans l'analyse du mouvement de rotation autour de son centre de masse.

Il faut donc également caractériser l'inertie du système dans un mouvement de rotation : la répartition de la masse dans le volume délimitant le système joue ici un rôle déterminant. Cette caractérisation de la distribution de la masse dans le système conduit au concept « d'opérateur d'inertie » ou « matrice d'inertie » et fait appel, dans le cas le plus général à six paramètres physiques caractéristiques du système étudié.

Par analogie avec l'étude du mouvement du point matériel, une grandeur physique vectorielle, le *moment cinétique* permettra alors de préciser de manière plus globale les propriétés du mouvement de rotation (en prenant également en compte les propriétés du champ des vitesses dans le système étudié). Cette grandeur cinétique intervient dans les relations de la dynamique pour comprendre l'origine d'un changement du mouvement de rotation (comme la quantité de mouvement permet de remonter à l'origine d'un changement du mouvement du point matériel).

Il est donc de première importance d'avoir une vision globale de la répartition (distribution) de la masse dans le système afin de comprendre ses propriétés d'inertie. Les grandeurs intrinsèques caractérisant la masse d'un système et sa répartition au sein du système permettent d'exprimer simplement les grandeurs cinétiques (comme la quantité de mouvement) du système étudié qui apparaissent dans les lois de la dynamique (ex. 2^{ème} loi de Newton).

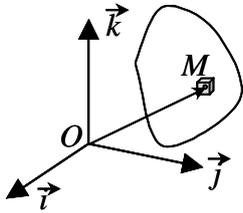
I CENTRE DE MASSE

1. Masse

Dans le cas d'un système constitué d'un ensemble de N points matériels A_i de masse m_i , la masse totale du système vaut $M = \sum_{i=1}^N m_i$, qui traduit simplement la propriété d'additivité des masses en mécanique newtonienne.

Remarque : lorsque le système se déplace à des vitesses proches de celle de la lumière (mécanique relativiste), la masse perd cette propriété d'additivité. Autrement dit, la masse totale d'un système relativiste constitué de deux sous systèmes (relativistes) n'est pas égale à la somme des masses de chacun des sous systèmes !

Pour une distribution continue de masse à l'intérieur d'un volume V :



$dm = \rho(M)dV$ est la masse d'un élément constitutif du système, de volume dV situé autour du point M . $\rho(M)$ caractérise la répartition de la masse dans le système étudié : $\rho(M)$ définit la *densité de masse au point M*.

La masse totale du système vaut :

$$M = \iiint_V \rho(M) dV$$

Si $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un référentiel galiléen. Le point M décrivant tout le volume V est repéré dans R par le vecteur \overline{OM} :

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

2. Centre de masse

Les systèmes étudiés sont repérés dans le référentiel $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen.

2.1 Système discret

Soit un système constitué d'un ensemble de N points matériels A_i de masse m_i .

Le centre de masse G du système est défini par :

$$\sum_{i=1}^N m_i \overline{A_i G} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \overline{OA_i}}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

2.2 Système continu

Le centre de masse G d'un solide caractérisé par la distribution de masse $\rho(M)$ est défini par :

$$\iiint_V \rho(M) \overline{MG} dV = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{OG} = \frac{\iiint_V \rho(M) \overline{OM} dV}{\iiint_V \rho(M) dV}$$

Les composantes du centre de masse sont donc :

$$\overline{OG} \begin{cases} \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{cases}$$

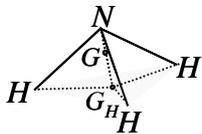
Remarque : le centre de masse est confondu avec le centre de gravité si le champ de la pesanteur peut être considéré comme constant dans tout le volume du système étudié. L'annexe C précise la détermination du centre de gravité dans le cas contraire.

2.3 Propriétés

Associativité : cette propriété découle de la définition du centre de masse.

Si G_k désigne le centre de masse d'un système matériel S_k de masse M_k , le centre de masse du système S constitué par la réunion des N systèmes S_k est le centre de masse des points G_k affectés des masses M_k : $\left(\sum_{k=1}^N M_k\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{k=1}^N M_k \overrightarrow{OG_k}$ (si les S_k n'ont pas d'éléments communs deux à deux).

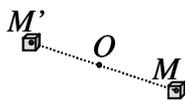
Exemple : centre de masse d'une molécule d'ammoniac :



Le centre de masse G de la molécule d'ammoniac est le centre de masse de l'atome d'azote et du centre de masse G_H des atomes d'hydrogène.

Symétrie matérielle :

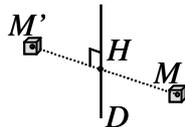
Un système S possède un élément de symétrie matérielle (un point, une droite, un plan) si les densités de masse $\rho(M')$ et $\rho(M)$ en un point M' image d'un point M quelconque de S par cet élément de symétrie sont égales.



symétrie par rapport à un point O

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM'}\right|$$

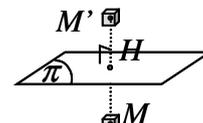
et $\rho(M) = \rho(M')$



symétrie par rapport à une droite D

$$\left|\overrightarrow{HM}\right| = \left|\overrightarrow{HM'}\right|$$

et $\rho(M) = \rho(M')$



symétrie par rapport à un plan π

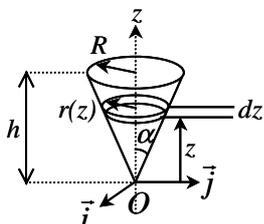
$$\left|\overrightarrow{HM}\right| = \left|\overrightarrow{HM'}\right|$$

et $\rho(M) = \rho(M')$

Ainsi, le centre de masse des points M' et M liés par l'élément de symétrie matérielle se trouve sur l'élément de symétrie. On peut donc en conclure la propriété suivante :

si un système possède un élément de symétrie matérielle, ce dernier contient le centre de masse.

Exemple : détermination de la position du centre de masse d'un cône plein homogène.



Puisque le cône est de révolution, le centre de masse G est situé sur l'axe de révolution. Il suffit donc de déterminer sa position exacte z_c , coordonnée dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$z_c = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(M) z dv = \frac{\rho}{M} \iiint_V z dv$$

$$\text{avec } dv = dr r d\varphi dz \text{ et } \frac{r(z)}{z} = \frac{R}{h} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$z_c = \frac{\rho}{M} \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=0}^{r(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} z dr r d\varphi dz = \frac{\rho}{M} \int_{z=0}^{z=h} z \pi r(z)^2 dz = \frac{\rho}{M} \pi \left[\frac{R}{h} \right]^2 \int_{z=0}^{z=h} z^3 dz = \frac{\rho}{M} \pi \left[\frac{R}{h} \right]^2 \frac{h^4}{4}$$

$$M = \iiint_V dm = \rho \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=0}^{r(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dr r d\varphi dz = \rho \int_{z=0}^{z=h} \pi r(z)^2 dz = \pi \rho \left[\frac{R}{h} \right]^2 \int_{z=0}^{z=h} z^2 dz = \pi \rho \left[\frac{R}{h} \right]^2 \frac{h^3}{3}$$

finalement :

$$z_c = \frac{3}{4} h.$$

II QUANTITE DE MOUVEMENT – MOMENT CINÉTIQUE

1. Définitions

Rappel : pour un point matériel M , de masse m , la quantité de mouvement définie dans un référentiel R est $\vec{p} = m \vec{V}_R(M)$.

Système discret :

Pour un système constitué d'un ensemble de N points matériels A_i de masse m_i , l'ensemble des vecteurs quantités de mouvement \vec{p}_i des différents points matériels forment un système de vecteurs qui sera caractérisé par ses éléments de réduction :

la résultante appelée *quantité de mouvement* ou *résultante cinétique* du système :

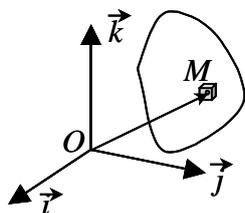
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_R(M_i),$$

le moment résultant en un point Q du référentiel R ou *moment cinétique* :

$$\vec{\sigma}_Q = \sum_i \overrightarrow{QA_i} \wedge \vec{p}_i = \sum_i m_i \overrightarrow{QA_i} \wedge \vec{V}_R(M_i).$$

Système continu :

L'extension de ces définitions au cas d'un solide est immédiate :



$d\vec{p} = \rho(M) dv \vec{V}_R(M) = dm \vec{V}_R(M)$ définit la quantité de mouvement de la particule de volume dv constitutive du système, de masse $dm = \rho(M) dv$, située en M et de vitesse $\vec{V}_R(M)$,

$d\vec{\sigma}_Q = \overrightarrow{QM} \wedge d\vec{p} = \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_R(M) dm$ définit son moment cinétique au point Q .

La quantité de mouvement totale du solide, ou *résultante cinétique* est donc :

$$\vec{P} = \iiint_V \rho(M) dv \vec{V}_R(M) = \iiint_V dm \vec{V}_R(M)$$

tandis que le *moment cinétique* résultant vaut :

$$\vec{\sigma}_Q = \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \rho(M) dv \vec{V}_R(M) = \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_R(M) dm$$

2. Propriétés élémentaires

Résultante cinétique :

Si G est le centre de masse du système :

$$\iiint_V \rho(M) \overrightarrow{MG} dV = \vec{0} \text{ donc } \left[\frac{d\left(\iiint_V \rho(M) \overrightarrow{MG} dV\right)}{dt} \right]_R = \vec{0} \text{ soit } \iiint_V \rho(M) \left[\frac{d\overrightarrow{MG}}{dt} \right]_R dV = \vec{0}.$$

Ainsi :

$$\iiint_V \rho(M) \left[\frac{d\overrightarrow{MG}}{dt} \right]_R dV = \iiint_V \rho(M) [\vec{V}_R(G) - \vec{V}_R(M)] dV = \vec{V}_R(G) \iiint_V \rho(M) dV - \iiint_V \rho(M) \vec{V}_R(M) dV = \vec{0}$$

d'où

$$\boxed{\vec{P} = M \vec{V}_R(G)}.$$

La résultante cinétique ne dépend que de la masse totale du système et de la vitesse de son centre de masse.

Moment cinétique :

Soit Q' un autre point du référentiel R : le moment cinétique en Q' s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{Q'} &= \iiint_V \overrightarrow{Q'M} \wedge \vec{V}_R(M) dm = \iiint_V (\overrightarrow{Q'Q} + \overrightarrow{QM}) \wedge \vec{V}_R(M) dm \\ \vec{\sigma}_{Q'} &= \iiint_V \overrightarrow{Q'Q} \wedge \vec{V}_R(M) dm + \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_R(M) dm = \overrightarrow{Q'Q} \wedge \iiint_V \vec{V}_R(M) dm + \vec{\sigma}_Q \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_{Q'} = \overrightarrow{Q'Q} \wedge \vec{P} + \vec{\sigma}_Q.$$

Le moment cinétique du système en un point Q' peut simplement être déterminé à partir du moment cinétique au point Q et de la résultant cinétique.

III REFERENTIEL BARYCENTRIQUE

Le référentiel barycentrique du système S étudié, ou référentiel du centre de masse R_B associé au référentiel d'étude R est le référentiel en translation dans R tel que la quantité de mouvement totale du système dans R_B soit nulle.

Puisque $\vec{P}^* = M \vec{V}_{R_B}(G) = \vec{0}$, $\vec{V}_{R_B}(G) = \vec{0}$ donc le centre de masse est fixe dans R_B . Ainsi, l'origine du référentiel barycentrique est généralement choisie au centre de masse du système.

Pour tout point M du système :

$$\vec{V}_R(M) = \vec{V}_R(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Dans le référentiel du centre de masse, le système est donc en rotation autour du point G :

$$\vec{V}_{R_B}(M) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{GM}.$$

IV 1^{ER} THEOREME DE KOENIG

Ce théorème permet de calculer le moment cinétique d'un système en un point Q en fonction du moment cinétique évalué dans le référentiel du centre de masse.

Soit G le centre de masse du système étudié. Soit R_B le référentiel barycentrique associé à R .

$$\vec{\sigma}_Q = \vec{\sigma}_G + \vec{P} \wedge \overrightarrow{GQ}$$

D'autre part, d'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}_R(M) = \vec{V}_{R_B}(M) + \vec{V}_e(M) = \vec{V}_{R_B}(M) + \vec{V}_R(G)$$

D'où :

$$\vec{\sigma}_G = \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_R(M) dm = \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{R_B}(M) dm + \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_R(G) dm$$

$$\vec{\sigma}_G = \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{R_B}(M) dm + \left(\iiint_V \overrightarrow{GM} dm \right) \wedge \vec{V}_R(G) = \iiint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_{R_B}(M) dm = \vec{\sigma}_G^{R_B}$$

puisque G est le centre de masse du système.

$$\boxed{\vec{\sigma}_G^R = \vec{\sigma}_G^{R_B}}$$

Le moment cinétique d'un système en son centre de masse G dans le référentiel R est toujours égal au moment cinétique du système en G dans le référentiel barycentrique.

Finalement, le 1^{er} théorème de Koenig s'écrit :

$$\boxed{\vec{\sigma}_Q = \overrightarrow{QG} \wedge \vec{P} + \vec{\sigma}_G^{R_B}}$$

Le moment cinétique d'un système est la somme du moment cinétique au point Q du centre de masse affecté de la masse totale du système et du moment cinétique par rapport au centre de masse, évalué dans le référentiel barycentrique (moment cinétique du système en rotation autour de son centre de masse, calculé dans le référentiel du centre de masse).

V MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE

L'évaluation du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un point fixe est particulièrement intéressante puisqu'elle permettra de déterminer le moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique.

Afin de simplifier les calculs, supposons que le système S étudié est en rotation autour du point fixe O origine du référentiel d'étude.

Ainsi, quelque soit le point M de S :

$$\vec{V}_R(M) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}$$

et

$$\vec{\sigma}_O = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{R_B}(M) dm = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}) dm$$

L'application vectorielle qui à tout vecteur \vec{u} associe le vecteur

$$\vec{I}(\vec{u}) = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) dm$$

est une application linéaire :

$$\vec{I}(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{I}(\vec{u}) + b\vec{I}(\vec{v})$$

où a et b sont deux nombres réels.

Cette application linéaire est alors représentée par la matrice $[I_O]$ dans le repère R (cf. cours de mathématique).

Soient I_x, I_y, I_z, u_x, u_y et u_z les composantes, respectivement, de $\vec{I}(\vec{u})$ et \vec{u} dans R :

$$\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } [\vec{I}(\vec{u})] = [I_O][\vec{u}]$$

si $[\vec{I}(\vec{u})]$ et $[\vec{u}]$ désignent les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes dans R de $\vec{I}(\vec{u})$ et \vec{u} respectivement :

$$\vec{u} \Leftrightarrow [\vec{u}] = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Dans ce formalisme, l'écriture du moment cinétique au point O est immédiat. Pour $\vec{u} = \vec{\Omega}_{S/R}$ il vient en effet :

$$[\vec{\sigma}_O] = [I_O][\vec{\Omega}_{S/R}]$$

$[I_O] = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$ est la matrice d'inertie du solide S, définie dans le référentiel R (cf. §VII pour le calcul de la matrice d'inertie d'un solide).

Remarque : puisque le solide n'est pas fixe dans R, les coefficients de la matrice d'inertie changent au cours du temps !! En pratique, il sera plus aisé de déterminer la matrice d'inertie dans une base liée au solide (généralement, dans la base principale d'inertie).

VI ENERGIE CINETIQUE

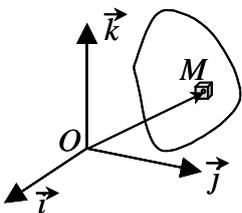
1. Définition

Rappel : pour un point matériel M, de masse m, repéré dans le référentiel R, l'énergie cinétique vaut : $E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}_R^2(M)$.

L'énergie étant une grandeur physique extensive (additive), pour un système constitué d'un ensemble de N points matériels A_i de masse m_i , l'énergie cinétique totale du système est donc :

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_R^2(M_i).$$

Ainsi, pour un solide, l'énergie cinétique totale est déterminée par sommation (continue) sur l'énergie cinétique des particules constitutives du système (de volume dv et de masse $dm = \rho(M)dv$) :



$$E_c = \iiint_V \frac{1}{2} \rho(M) dv \vec{V}_R^2(M) = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_R^2(M) dm.$$

2. 2^{ème} théorème de Koenig

Comme pour le calcul du moment cinétique, l'évaluation de l'énergie cinétique totale peut être décomposée en deux termes, correspondants à l'énergie cinétique du système assimilé à son centre de masse G (et affecté de toute la masse), et à l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse.

Soit R_B le référentiel barycentrique associé à R et au système S étudié .

$$\vec{V}_R(M) = \vec{V}_R(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{GM} = \vec{V}_R(G) + \vec{V}_{R_B}(M)$$

Ainsi :

$$E_c = \iiint_V \frac{1}{2} \rho(M) dV \vec{V}_R^2(M) = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_R^2(G) dm + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_{R_B}^2(M) dm + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_R(G) \vec{V}_{R_B}(M) dm$$

$$E_c = \frac{1}{2} M \vec{V}_R^2(G) + E_c^{R_B} + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_R(G) \vec{V}_{R_B}(M) dm$$

avec $M = \iiint_V dm$ la masse totale du système,

et $E_c^{R_B} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_{R_B}^2(M) dm$, l'énergie cinétique du système dans le référentiel du centre de masse.

Mais :

$$\begin{aligned} \iiint_V \vec{V}_R(G) \vec{V}_{R_B}(M) dm &= \vec{V}_R(G) \iiint_V \vec{V}_{R_B}(M) dm = \vec{V}_R(G) \iiint_V \left(\frac{d\overline{GM}}{dt} \right)_{R_B} dm \\ &= \vec{V}_R(G) \left(\frac{d \left[\iiint_V \overline{GM} dm \right]}{dt} \right)_{R_B} = \vec{0} \text{ par définition du centre de masse.} \end{aligned}$$

Le deuxième théorème de Koenig s'écrit donc :

$$E_c = \frac{1}{2} M \vec{V}_R^2(G) + E_c^{R_B}.$$

L'énergie cinétique d'un système est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse affecté de toute la masse du système et de l'énergie cinétique du système correspondant à son mouvement dans le référentiel barycentrique (énergie cinétique de rotation autour du centre de masse).

3. Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un point fixe

Du deuxième théorème de Koenig, apparaît une nouvelle fois l'intérêt de l'étude du solide en rotation autour d'un point (fixe).

Comme dans le cas du calcul du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un point, supposons que le système S étudié soit en rotation autour du point fixe O origine du référentiel d'étude.

Ainsi, quelque soit le point M de S :

$$\vec{V}_R(M) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{OM}$$

et

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_R^2(M) dm = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{V}_R(M) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}) dm = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_R(M)) dm$$

puisque le produit mixte est invariant par une permutation circulaire des vecteurs.

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \iiint_V (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_R(M)) dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_O$$

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_O.$$

Si $[\vec{\Omega}_{S/R}]$ désigne une nouvelle fois la matrice colonne dont les coefficients sont les composantes dans R de $\vec{\Omega}_{S/R} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$, il vient :

$$E_c = \frac{1}{2} [\vec{\Omega}_{S/R}] [I_O] [\vec{\Omega}_{S/R}]$$

avec ${}^t[\vec{\Omega}_{S/R}]$ la matrice transposée de $[\vec{\Omega}_{S/R}]$: ${}^t[\vec{\Omega}_{S/R}] = (\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z)$

Rappel : si $\vec{e}_\Delta = \frac{\vec{\Omega}_{S/R}}{|\vec{\Omega}_{S/R}|}$ est le vecteur directeur de l'axe instantané de rotation Δ , $I_\Delta = {}^t[\vec{e}_\Delta] [I_O] [\vec{e}_\Delta]$

est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe instantané de rotation donc :

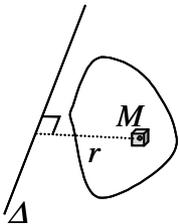
$$E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \Omega_{S/R}^2.$$

Remarque : dans le référentiel R , les coefficients de la matrice d'inertie (donc I_Δ) varient au cours du temps.

VII MATRICE D'INERTIE

Afin de caractériser la répartition de la masse d'un système par rapport à une rotation autour d'un axe, 6 coefficients indépendants sont nécessaires, qui permettent le calcul général du moment d'inertie du système par rapport à cet axe de rotation.

1. Définition



Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ est :

$$I_\Delta = \iiint_V r^2 \rho(M) dv$$

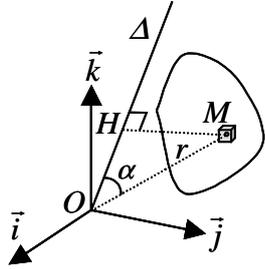
où r est la distance de M de S à l'axe Δ .

Par définition, le moment d'inertie est une grandeur additive : le moment d'inertie par rapport à un axe Δ d'un système constitué de deux sous-systèmes est égale à la somme des moments d'inertie par rapport à cet axe de chacun des sous-systèmes.

2. Moments et produits d'inertie

Comment calculer le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe quelconque ?

Pour simplifier la présentation, supposons que l'axe Δ passe par l'origine du référentiel R dans lequel le solide est immobile (référentiel lié au solide).



Soit \vec{e}_Δ le vecteur directeur de Δ : $|\vec{e}_\Delta| = 1$ et $\vec{e}_\Delta = e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k}$

Soit H la projection orthogonale de M sur Δ .

$$I_\Delta = \iiint_V |\overrightarrow{HM}|^2 \rho(M) dv = \iiint_V |\vec{e}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}|^2 \rho(M) dv = \iiint_V |\vec{e}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}|^2 dm$$

avec $\vec{e}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM} \begin{cases} e_y z - e_z y \\ e_z x - e_x z \\ e_x y - e_y x \end{cases}$ $|\vec{e}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}|^2 = (e_y z - e_z y)^2 + (e_z x - e_x z)^2 + (e_x y - e_y x)^2$

$$|\vec{e}_\Delta \wedge \overrightarrow{OM}|^2 = (y^2 + z^2)e_x^2 + (x^2 + z^2)e_y^2 + (x^2 + y^2)e_z^2 - 2xy e_x e_y - 2xz e_x e_z - 2zy e_z e_y$$

d'où :

$$I_\Delta = I_{xx} e_x^2 + I_{yy} e_y^2 + I_{zz} e_z^2 - 2I_{xy} e_x e_y + 2I_{xz} e_x e_z + 2I_{yz} e_z e_y$$

avec :

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) dm$$

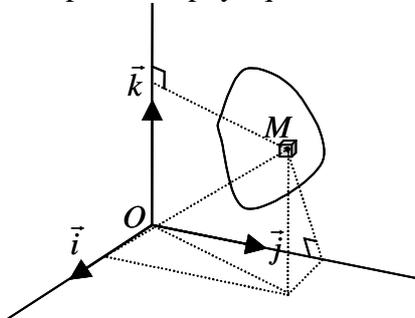
$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy dm$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz dm$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz dm$$

Interprétation physique :



$\sqrt{y^2 + z^2}$ est la distance de M à l'axe Ox ,

$\sqrt{x^2 + z^2}$ est la distance de M à l'axe Oy ,

$\sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de M à l'axe Oz ,

I_{xx} , I_{yy} et I_{zz} sont donc respectivement les *moments d'inertie* du système par rapport aux axes Ox , Oy et Oz .

Les I_{xy} , I_{yz} et I_{xz} sont appelés *produits d'inertie*.

Ces 6 coefficients ne dépendent que du système (de sa répartition de masse) et du repère dans lequel ils sont calculés, mais ne dépendent pas de l'axe Δ .

3. Opérateur d'inertie

Les 6 coefficients caractéristiques de la répartition de la masse d'un système peuvent être regroupés dans une matrice symétrique 3×3 , $[I_o]$ définie dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (et introduite dans le paragraphe V ci-dessus).

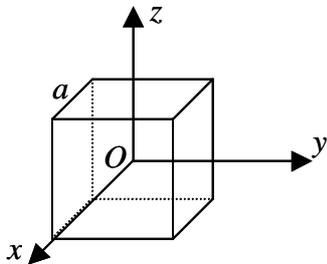
$$[I_o] = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Rappel : les colonnes de la matrice $[I_o]$ ne sont autres que les composantes de $\vec{I}(\vec{i})$, $\vec{I}(\vec{j})$, $\vec{I}(\vec{k})$, images des vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par l'application linéaire définie au paragraphe V.

$[I_o]$ est une matrice carrée réelle et symétrique appelée *matrice d'inertie* de S dont les coefficients sont calculés dans le référentiel R , ici lié au système.

Remarque : dans un autre référentiel, les coefficients de cette matrice auront donc d'autres valeurs numériques !

4. Exemple : matrice d'inertie d'un cube homogène dans ses axes



Soit un cube homogène d'arête a . Déterminons sa matrice d'inertie dans le repère $(Oxyz)$ représenté sur la figure ci-contre.

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) dm = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz$$

$$I_{xx} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dz + \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz$$

$$I_{xx} = \rho [x]_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} [z]_{-a/2}^{a/2} + \rho [x]_{-a/2}^{a/2} [y]_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$I_{xx} = 2\rho a a \frac{2}{3} \frac{a^3}{8} = \rho \frac{a^5}{6}$$

avec $\rho = \frac{M}{a^3}$

$$I_{xx} = M \frac{a^2}{6}.$$

Le calcul des moments d'inertie par rapport aux axes Oy et Oz est analogue d'où :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = M \frac{a^2}{6}.$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy \, dm = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} xy \, \rho \, dx \, dy \, dz = \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} xy \, dx \, dy$$

$$I_{xy} = \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} xy \, dx \, dy = \rho a \left[\int_{-a/2}^0 \int_{-a/2}^{a/2} xy \, dx \, dy + \int_0^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} xy \, dx \, dy \right]$$

en posant $u = -x$ donc $du = -dx$

$$I_{xy} = \rho a \left[\int_{a/2}^0 \int_{-a/2}^{a/2} u y \, du \, dy + \int_0^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} x y \, dx \, dy \right] = \rho a \left[- \int_0^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} u y \, du \, dy + \int_0^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} x y \, dx \, dy \right] = 0$$

De même $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

La matrice d'inertie du cube homogène est donc :

$$[I_O] = M \frac{a^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : le repère $(Oxyz)$ est un repère privilégié puisque la matrice d'inertie est diagonale. $(Oxyz)$ est appelé le repère principal d'inertie.

5. Axes et moments principaux d'inertie

5.1 Définition

On peut démontrer que pour un système quelconque, il existe un référentiel lié à ce système $R_p = (O_p, \vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}, \vec{e}_{p3})$ dans le quel la matrice d'inertie est diagonale. Les axes de ce référentiel définissent les *axes principaux d'inertie* et les moments d'inertie par rapport à ces axes (I_1 , I_2 et I_3) sont les *moments d'inertie principaux* :

$$[I_{O_p}]_{R_p} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$[\vec{I}(S, \vec{e}_{p1})] = [I_{O_p}]_{R_p} [\vec{e}_{p1}]$ donc $\vec{I}(S, \vec{e}_{p1}) = I_3 \vec{e}_{p1}$ avec des relations analogues pour les deux autres vecteurs du repère principal d'inertie.

Remarque : du point de vue mathématique, cette propriété découle des caractéristiques de la matrice d'inertie puisque toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

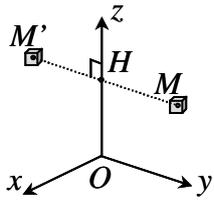
5.2 Système « symétrique »

La recherche du repère principal d'inertie d'un système est grandement simplifiée dans le cas où le système possède des propriétés de symétrie matérielle.

Axe de symétrie matérielle

Tout axe de symétrie matérielle est axe principal d'inertie.

Afin de simplifier la démonstration, supposons que le système S possède un axe de symétrie matérielle parallèle à l'axe Oz d'un référentiel lié à S .



Pour démontrer que l'axe Oz est axe principal d'inertie il suffit de montrer que

$$\vec{I}(S, \vec{k}) = I_{zz} \vec{k},$$

$$\text{avec } \vec{I}(S, \vec{k}) \begin{cases} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} \end{cases} \text{ donc que } I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

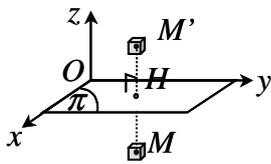
$$I_{xz} = \iiint_V xz \rho(M) dv = \iiint_{V/2} xz \rho(M) dv + \iiint_{V/2} x'z' \rho(M') dv' = \iiint_{V/2} xz \rho(M) dv + \iiint_{V/2} (-x)z \rho(M) dv' = 0$$

car $M(x, y, z)$ et $M'(x' = -x, y' = -y, z' = z)$ sont liés par l'axe de symétrie. Un calcul analogue conduit facilement à $I_{yz} = 0$. Donc $\vec{I}(S, \vec{k}) = I_{zz} \vec{k}$.

Plan de symétrie matérielle

Toute direction perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie.

Là encore, la démonstration est simplifiée si l'on suppose que le système S possède un plan de symétrie matérielle parallèle au plan Oxy d'un référentiel lié à S .



Pour démontrer que toute direction perpendiculaire au plan de symétrie est axe principale d'inertie, on peut par exemple démontrer que l'axe Oz est axe principal soit :

$$\vec{I}(S, \vec{k}) = I_{zz} \vec{k},$$

$$\text{avec } \vec{I}(S, \vec{k}) \begin{cases} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} \end{cases} \text{ donc que } I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz \rho(M) dv = \iiint_{V/2} xz \rho(M) dv + \iiint_{V/2} x'z' \rho(M') dv' = \iiint_{V/2} xz \rho(M) dv + \iiint_{V/2} x(-z) \rho(M) dv' = 0$$

car $M(x, y, z)$ et $M'(x' = x, y' = y, z' = -z)$ sont liés par le plan de symétrie. De même $I_{yz} = 0$, d'où $\vec{I}(S, \vec{k}) = I_{zz} \vec{k}$.

5.3 Applications

Tout trièdre tri-rectangle dont deux de ses plans sont plans de symétrie matérielle d'un système est un trièdre principal d'inertie pour ce système.

Tout trièdre rectangle dont deux de ses axes sont axes de symétrie matérielle d'un système est un trièdre principal d'inertie pour ce système.

Matrice d'inertie « cylindrique »



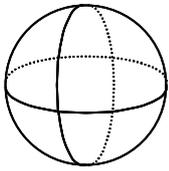
Pour un cylindre homogène de révolution (hauteur h , rayon R , masse M), l'axe de révolution est axe de symétrie. Tout plan passant par l'axe de révolution est également plan de symétrie.

La matrice d'inertie du cylindre dans toute base orthonormée ayant l'un de ses vecteurs parallèle à l'axe de révolution a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \text{ si l'axe de révolution est parallèle à } \vec{e}_3,$$

$$\text{avec } I = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M h^2 \text{ et } J = \frac{1}{2} M R^2$$

Matrice d'inertie « sphérique »



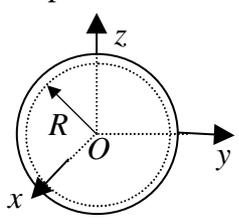
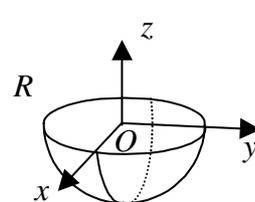
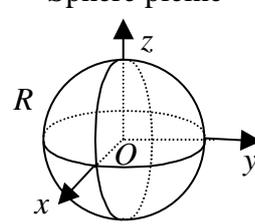
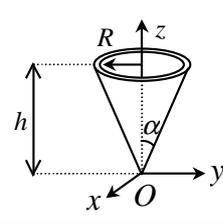
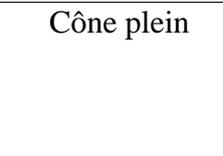
Toute droite passant par le centre de masse d'une sphère homogène (rayon R , masse M) est axe de symétrie.

La matrice d'inertie de la sphère dans toute base orthonormée a donc la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \text{ avec } I = \frac{2}{5} M R^2.$$

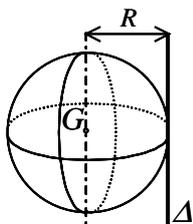
6 Exemples de matrices d'inertie (principales)

Corps homogènes de masse M	Moments et produits d'inertie
<p>Cylindre creux</p>	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M l^2$ $I_{zz} = M R^2$
<p>Cylindre</p>	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M l^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2} M R^2$
<p>Parallélépipède rectangle</p>	$I_{xx} = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$

Corps homogènes de masse M	Moments et produits d'inertie
Sphère creuse 	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} M R^2$
Demi-sphère creuse 	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} M R^2$
Sphère pleine 	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} M R^2$
Cône creux 	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{2} M h^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2} M R^2$
Cône plein 	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{5} M h^2 + \frac{3}{10} M R^2$ $I_{zz} = \frac{3}{5} M R^2$

7. Théorème d'Huygens-Schteiner

Exemple : connaissant le moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à l'un de ses diamètres, quelle est la valeur du moment d'inertie par rapport à un axe tangent à la sphère ?



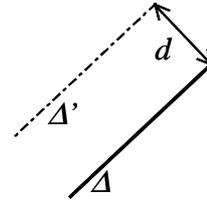
Le théorème d'Huygens donne immédiatement la réponse :

$$I_{\Delta} = I_G + M R^2 = \frac{7}{5} M R^2$$

avec I_G le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à Δ et passant par le centre de masse G .

Dans le cas général, le théorème d'Huygens permet de calculer le moment d'inertie I_{Δ} d'un système par rapport à un axe Δ connaissant le moment d'inertie $I_{\Delta'}$ par rapport à un axe Δ' parallèle à Δ et distant de d :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} + M d^2.$$



Démonstration :

Soit $[I_O]_R$ la matrice d'inertie d'un système dans le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $[I_{O'}]_{R'}$ la matrice d'inertie du système dans le repère $R' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ translaté de R tel que $\overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Soit O' le centre de masse du système.

Par définition :

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) dm = \iiint_V [(x'+a)^2 + (y'+b)^2] dm = \iiint_V [x'^2 + y'^2 + a^2 + b^2 + 2ax' + 2by'] dm$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x'^2 + y'^2) dm + \iiint_V (a^2 + b^2) dm + 2a \iiint_V x' dm + 2b \iiint_V y' dm$$

puisque O' est le centre de masse : $\iiint_V x' dm = \iiint_V y' dm = 0$.

Donc :

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (a^2 + b^2)M.$$

De même :

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (b^2 + c^2)M \text{ et } I_{yy} = I_{y'y'} + (a^2 + c^2)M$$

Pour les produits d'inertie :

$$I_{xy} = \iiint_V xy dm = \iiint_V (x'+a)(y'+b) dm = \iiint_V (x'y' + ab + bx' + ay') dm = I_{x'y'} + M ab$$

de même :

$$I_{xz} = I_{x'z'} + M ac \text{ et } I_{yz} = I_{y'z'} + M bc.$$

DYNAMIQUE DES SYSTEMES MATERIELS

La dynamique des systèmes matériels permet de comprendre le lien entre le mouvement d'un système et les causes de ce mouvement. Plus précisément, la dynamique des systèmes matériels s'appuie sur le principe fondamental de la dynamique, qui est une extension de la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) rencontrée dans le cadre de la mécanique du point matériel. Dans ce contexte, le principe fondamental de la dynamique est un postulat. Le principe relie les grandeurs physiques caractéristiques du mouvement, (les grandeurs cinétiques) et les grandeurs physiques représentatives des actions exercées sur le système (les forces et les moments).

Ainsi, connaissant les forces mises en jeu, ces relations permettent de prévoir le mouvement du système (approche Newtonienne),

ou bien,

connaissant le mouvement du système, les forces à l'origine du mouvement peuvent être déterminées (approche Lagrangienne).

Une approche « énergétique » du système est également possible à travers le théorème de l'énergie cinétique (théorème des forces vives).

I FORCES

Les forces appliquées à un système quelconque peuvent être classées en différentes catégories.

1. Forces intérieures et forces extérieures

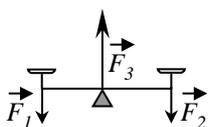
Soit le système étudié S défini par un ensemble de points matériels A_i . Ce système est en présence de points B_k .

L'ensemble des forces exercées par les point A_j sur un point A_i ($i \neq j$) constitue par définition l'ensemble des *forces intérieures*.

Les forces exercées par les point B_k (qui n'appartiennent pas au système) constituent l'ensemble des *forces extérieures*.

Remarque : Soit S' le nouveau système étudié, les forces exercées par les différents points (A_j et B_k) les uns sur les autres sont alors toutes des forces intérieures.

Exemple : soit la balance constituée d'un fléau et de deux plateaux, en équilibre sur un couteau.



Si le système étudié est le fléau, \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 sont des forces extérieures.

Si le système étudié est constitué par le fléau et les deux plateaux, \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont des forces intérieures, \vec{F}_3 est une force extérieure.

2. Forces de liaison

Les forces de liaison appartiennent à la catégorie des forces extérieures. Elles contraignent le déplacement du système étudié. Par exemple, une liaison pivot impose un mouvement de rotation autour d'un axe. L'effet des forces de liaison est donc de diminuer le nombre de degrés de liberté du système.

Généralement, le calcul des forces de liaison est très complexe car il dépend de la nature exacte des surfaces en contact. Leur expression n'est donc pas fondamentalement simple comme peut l'être l'expression de la force de gravitation ou la force de Lorentz... Aussi, bien que les forces de liaison réduisent le nombre de paramètres dont dépend le mouvement du système (nombre de degrés de liberté < 6), l'étude de ce mouvement est toujours plus complexe qu'en leur absence. En particulier, leur nombre sont d'autant d'inconnues supplémentaires qui devront être déterminées. Les lois phénoménologiques permettant de les décrire (cf. lois de Coulomb du frottement solide) apporteront donc de précieuses équations afin de permettre la résolution du problème posé.

3. Forces « à distance »

Finalement toutes les forces extérieures autres que les forces de liaison définissent les forces « à distance ». La force de pesanteur, la force créée par un champ magnétique ou un champ électrique en sont des exemples. Contrairement aux forces de liaison, leurs expressions sont généralement déterminées et n'apporte donc pas d'inconnues supplémentaires dans le problème à résoudre.

Par exemple, la force de pesanteur exercée sur un point matériel de masse m placé dans le champ de pesanteur \vec{g} est donnée par $\vec{F} = m \vec{g}$.

II PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DES SYSTEMES

1. Enoncé du principe fondamental

Le principe fondamental constitue une généralisation de la relation fondamentale de la dynamique postulée par Newton dans le cadre de la mécanique du point matériel, à des systèmes quelconques. L'étude du mouvement d'un système quelconque étant décomposé en deux temps (étude du mouvement de son centre de masse puis étude du mouvement autour du centre de masse), le principe fondamental donne les relations nécessaires à la compréhension d'un changement de chacun de ces mouvements.

Soit un système matériel S dont le mouvement est repéré dans un référentiel R supposé galiléen. Soit Q un point fixe de R . Soit \vec{F} et \vec{M}_Q la résultante et le moment résultant au point Q des actions exercées sur le système :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}} \\ \vec{M}_Q &= \vec{M}_Q^{\text{int}} + \vec{M}_Q^{\text{ext}}\end{aligned}$$

où \vec{F}_{int} , \vec{F}_{ext} , \vec{M}_Q^{int} et \vec{M}_Q^{ext} désignent respectivement la résultante des forces intérieures, la résultante des forces extérieures, le moment résultant des forces intérieures et le moment résultant des forces extérieures au point Q .

Le principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_R = \vec{F}_{ext} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt} \right)_R = \vec{M}_Q^{ext} \end{cases}}$$

La première relation vectorielle indique donc que le centre de gravité d'un système matériel quelconque (rigide ou déformable) a le même mouvement qu'un point matériel libre où serait concentrée toute la masse du système et auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures (de résultante \vec{F}_{ext}).

Dans le cas le plus général, ces deux équations vectorielles conduisent à 6 équations scalaires.

Dans le cas du mouvement d'un système libre (possédant 6 degrés de liberté) ces 6 équations scalaires permettent de déterminer les 6 équations horaires du mouvement.

Néanmoins, pour un système lié (ex. le système est en contact avec un autre système) les forces de liaison ajoutent des inconnues supplémentaires (les 3 composantes de la résultante des force de contact et les 3 composantes du moment résultant en Q des forces de contact). Ainsi, sans informations supplémentaires le problème posé ne sera pas soluble. Seul l'introduction d'équations additionnelles (comme celles fournies par les lois du frottement solide) permettront de résoudre le système de N inconnues par la connaissance de N équations liant ces inconnues.

2. Remarques importantes

2.1 Résultante dynamique

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d}{dt} [M \vec{V}_R(G)] \right)_R = M \gamma_R(G) \text{ si } G \text{ est le centre de masse du système.}$$

2.2 Moment dynamique résultant :

$$\vec{\sigma}_Q = \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_R(M) dm \text{ où } Q \text{ est un point du référentiel } R.$$

Si Q est fixe dans R :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt} \right)_R = \left(\frac{d}{dt} \left[\iiint_V (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{V}_R(M) dm \right] \right)_R \text{ où } O \text{ est l'origine du référentiel } R.$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt} \right)_R = \iiint_V \left(\frac{d\overrightarrow{QO}}{dt} \right)_R \wedge \vec{V}_R(M) dm + \iiint_V \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R \wedge \vec{V}_R(M) dm + \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \left(\frac{d\vec{V}_R(M)}{dt} \right)_R dm$$

$\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R = \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \left(\frac{d\vec{V}_R(M)}{dt}\right) dm = \vec{K}_Q$ puisque le point Q est fixe. \vec{K}_Q est par définition le *moment résultant dynamique* du système dans R . Ainsi le principe fondamental de la dynamique s'écrit également : $\vec{K}_Q = \vec{M}_Q^{ext}$.

Si le point Q est mobile dans le référentiel R :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R = \iiint_V (-\vec{V}_R(Q)) \wedge \vec{V}_R(M) dm + \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \left(\frac{d\vec{V}_R(M)}{dt}\right) dm$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R + \vec{V}_R(Q) \wedge M \vec{V}_R(G) = \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge \left(\frac{d\vec{V}_R(M)}{dt}\right) dm$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_R = \vec{F}_{ext} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R + \vec{V}_R(Q) \wedge M \vec{V}_R(G) = \vec{M}_Q^{ext} \end{array} \right.$$

2.3 Cas particuliers :

$$Q = G : \left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\right)_R = \vec{M}_G^{ext} \text{ est toujours vraie.}$$

Si Q a une trajectoire parallèle à celle du centre de masse $\vec{V}_R(Q) \wedge \vec{V}_R(G) = \vec{0}$ donc $\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R = \vec{M}_Q^{ext}$ est également vérifiée.

2.4 Dans le référentiel du centre de masse :

D'après le 1^{er} théorème de Koenig : $\vec{\sigma}_Q = \overrightarrow{QG} \wedge \vec{P} + \vec{\sigma}_G^{R_B}$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G^{R_B}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{QG}}{dt}\right)_R \wedge \vec{P} + \overrightarrow{QG} \wedge \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_R = \vec{M}_Q^{ext}$$

mais $\left(\frac{d\overrightarrow{QG}}{dt}\right)_R \wedge \vec{P} = \vec{0}$ si Q est immobile ou a une trajectoire parallèle à celle de G .

$$\text{Ainsi } \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G^{R_B}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{QG} \wedge \vec{F}_{ext} = \vec{M}_Q^{ext},$$

Donc $\left(\frac{d\vec{\sigma}_G^{R_B}}{dt}\right)_R = \vec{M}_Q^{ext} + \vec{F}_{ext} \wedge \overrightarrow{QG}$ soit $\boxed{\left(\frac{d\vec{\sigma}_G^{R_B}}{dt}\right)_R = \vec{M}_G^{ext}}$, que le référentiel barycentrique soit galiléen ou non (puisque le moment des forces d'inertie au centre de masse est nul !).

2.5 Pour un système isolé

Dans le cas d'un système isolé, le principe fondamental s'écrit

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_R = \vec{0} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt}\right)_R = \vec{0} \end{cases}$$

donc la résultante cinétique et le moment cinétique du système se conservent :

$$\begin{cases} \vec{P} = \overrightarrow{cte} \\ \vec{\sigma}_Q = \overrightarrow{cte} \end{cases}$$

2.6 Principe de la statique

Si le solide S est en équilibre, par définition, le vecteur vitesse de tout point M de S est nul à tout instant. La relation du champ des vitesses dans un solide permet donc de conclure que dans ce cas :

$\vec{V}_R(G) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{0}$ donc la résultante cinétique et le moment cinétique en n'importe quel point Q de R sont également nuls.

En particulier, pour un solide S soumis à des forces de liaison (solide en contact ponctuel), le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{liaison} = \vec{0} \\ \vec{M}_I^{ext} + \vec{M}_I^{liaison} = \vec{0} \end{cases} \text{ si } I \text{ est le point de contact.}$$

avec $\begin{cases} \vec{F}_{liaison} = \vec{T} + \vec{N} \\ \vec{M}_I^{liaison} = \vec{M}_I^{\parallel} + \vec{M}_I^{\perp} \end{cases}$ en décomposant les éléments de réduction des actions de contact en

leurs composantes parallèles et normales au plan tangent en I au solide S .

Tant que l'équilibre persiste, les forces et moments des actions de contact s'ajustent pour maintenir les deux sommes ci-dessus égales à zéro. Rappelons que cet ajustement n'a lieu que dans la mesure où les conditions imposées par les lois de Coulomb du frottement solide sont satisfaites :

- i) maintien du contact : $N > 0$,
- ii) non glissement : $|\vec{T}| < f_s |\vec{N}|$,
- iii) non pivotement : $|\vec{M}_I^{\perp}| < \lambda_s |\vec{N}|$,
- iv) non roulement : $|\vec{M}_I^{\parallel}| < \mu_s |\vec{N}|$.

III THEOREME DES ACTIONS RECIPROQUES

Soit S un système constitué de deux sous-système S_1 et S_2 en interactions et Q un point (fixe) du référentiel d'étude R .

Soit $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ ($\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$) la résultante des forces exercées par S_2 sur S_1 (S_1 sur S_2),

$\vec{M}_Q^{2 \rightarrow 1}$ ($\vec{M}_Q^{1 \rightarrow 2}$) le moment résultant en Q des forces exercées par S_2 sur S_1 (S_1 sur S_2),

\vec{F}_1 (\vec{F}_2) la résultante des autres forces exercées sur S_1 (S_2),

$\vec{M}_Q^{(1)}$ ($\vec{M}_Q^{(2)}$) le moment résultant en Q .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué successivement à S , S_1 puis S_2 s'écrit (avec des notations évidentes) :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q}{dt} \right)_R = \vec{M}_Q^{(1)} + \vec{M}_Q^{(2)} + \vec{M}_Q^{2 \rightarrow 1} + \vec{M}_Q^{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{P}_1}{dt} \right)_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q^{(1)}}{dt} \right)_R = \vec{M}_Q^{(1)} + \vec{M}_Q^{2 \rightarrow 1} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{P}_2}{dt} \right)_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_Q^{(2)}}{dt} \right)_R = \vec{M}_Q^{(2)} + \vec{M}_Q^{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (3)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \\ \vec{\sigma}_Q &= \vec{\sigma}_Q^{(1)} + \vec{\sigma}_Q^{(2)} \end{aligned}$$

Par soustraction membres à membres (1) - (2) - (3), il vient :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{M}_Q^{2 \rightarrow 1} + \vec{M}_Q^{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}}$$

qui traduit le fait que les actions exercées par S_1 sur S_2 sont opposées aux actions exercées par S_2 sur S_1 .

Application : si S est un système quelconque, l'ensemble des forces intérieures est caractérisé par :

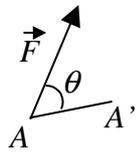
$$\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}_Q^{\text{int}} = \vec{0} .$$

IV THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

1 Travail d'une force

1.1 Rappels

Soit un point matériel M soumis à la force \vec{F} et se déplaçant de A vers A' entre t et $t+dt$:



Le travail élémentaire de la force \vec{F} pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{AA'} = d\vec{l}$ est défini par :

$$\partial W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AA'} \text{ avec } \vec{V}_R(M) = \frac{\overrightarrow{AA'}}{dt}$$

$$\partial W = \vec{F} \cdot \vec{V}_R(M) dt$$

$$\partial W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AA'}| \cos \theta$$

- si $\partial W > 0$ le travail élémentaire est *moteur*,
 $\partial W < 0$ le travail élémentaire est *résistant*,
 $\partial W = 0$ donc $\vec{F} \perp \overrightarrow{AA'}$: la force ne travaille pas.

Le travail étant une énergie s'exprime en joule.

Le long de la trajectoire Γ , le travail de la force \vec{F} est donc :

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{V}_R(M) dt$$

Dans le cas où la force \vec{F} ne dépend pas de la position du point M , est indépendante de la vitesse de M et est indépendante du temps (M se meut dans un champ de forces invariables) :

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_{\Gamma} d\vec{l}$$

Le travail ne dépend pas de la loi du mouvement mais uniquement du chemin suivi.

Si la force dépend de la position du point M et éventuellement du temps, $\vec{F} = \vec{F}(M, t) = \vec{F}(x, y, z, t)$, la force dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire $U(x, y, z, t)$ telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) \text{ soit } \vec{F} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

U est l'énergie potentielle dont dérive la force \vec{F} à l'instant t . Si $U = U(x, y, z)$ l'énergie potentielle est indépendante du temps.

Les *surfaces équipotentiels* sont définies par les surfaces sur lesquelles $U = cte$. Par définition de \vec{F} , la force est perpendiculaire aux surfaces équipotentiels et dirigée vers les potentiels décroissants.

Remarque : différentielle totale

Soit une fonction scalaire $U(x, y, z, t)$. La différentielle totale de U est par définition :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Dans le référentiel R rapporté à une base orthonormée :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Pour un déplacement infinitésimal du point M : $d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$
d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{l} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

ainsi

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{l} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Le travail élémentaire de la force \vec{F} dérivant du potentiel U s'écrit :

$$\partial W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Si de plus le potentiel est indépendant du temps $\partial W = -dU$ et le travail le long d'une trajectoire Γ ne dépend alors que du point initial et du point final :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \partial W = \int_A^B -dU = U_A - U_B.$$

En particulier le long d'une courbe fermée $W = \oint_{\Gamma} \partial W = \oint_{\Gamma} -dU = 0$.

Exemple : champ de force Newtonien

Force centrale de la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ (attraction universelle, force électrostatique) dérive du potentiel $U = \frac{K}{r} + cte$

1.2 Déplacement élémentaire d'un solide

Soit un solide S repéré dans le référentiel R . M_1 et M_2 deux points de S .

$\vec{V}_R(M_1) = \vec{V}_R(M_2) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{M_2 M_1}$ si $\vec{\Omega}_{S/R}$ est le vecteur rotation instantanée de S dans R .

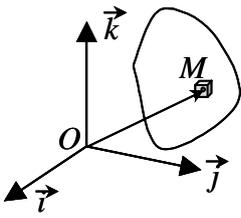
$$\vec{V}_R(M_1) dt = \vec{V}_R(M_2) dt + \vec{\Omega}_{S/R} dt \wedge \overrightarrow{M_2 M_1}$$

$$d\vec{M}_1 = d\vec{M}_2 + d\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{M_2 M_1}$$

avec $d\vec{M}_1 = \vec{V}_R(M_1)dt$ représente le déplacement élémentaire de M_1 pendant le temps dt ,
 $d\vec{M}_2 = \vec{V}_R(M_2)dt$ représente le déplacement élémentaire de M_2 pendant le temps dt ,
 $d\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_{S/R} dt$ représente l'angle élémentaire dont à tourner S pendant dt .

1.3 Travail élémentaire des forces extérieures appliquées à un solide

Si le solide S est soumis à des actions extérieures caractérisées par leur résultante $\vec{F}_{ext}(A)$ et leur moment résultant \vec{M}_A^{ext} en un point A appartenant au solide.



Le travail élémentaire des actions qui s'exercent sur le solide lorsque celui-ci subit un déplacement élémentaire est la sommation des travaux élémentaires des particules constitutives du solide S , chacune soumise à la force $\vec{f}(M)dv$: $\vec{f}(M)$ définit donc une densité de forces extérieures au point M de S et

$$\partial W = \iiint_V \vec{f}(M) dv \cdot d\vec{M}$$

Avec $d\vec{M} = d\vec{A} + d\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AM}$,

$$\partial W = \iiint_V \vec{f}(M) dv \cdot (d\vec{A} + d\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AM}) = \iiint_V \vec{f}(M) dv \cdot d\vec{A} + \iiint_V \vec{f}(M) dv \cdot (d\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AM})$$

$$\partial W = \vec{F}_{ext}(A) \cdot d\vec{A} + \iiint_V d\vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\overline{AM} \wedge \vec{f}(M) dv) = \vec{F}_{ext}(A) \cdot d\vec{A} + d\vec{\Omega}_{S/R} \cdot \iiint_V \overline{AM} \wedge \vec{f}(M) dv$$

en posant $\vec{F}_{ext}(A) = \iiint_V \vec{f}(M) dv$ la résultante en A des actions exercées sur S

et $\vec{M}_A^{ext} = \iiint_V \overline{AM} \wedge \vec{f}(M) dv$ le moment résultant en A des actions exercées sur S ,

d'où

$$\partial W = \vec{F}_{ext}(A) \cdot d\vec{A} + d\vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{M}_A^{ext}$$

1.4 Travail des forces intérieures

Système de points (système discret déformable) :

Soit un système de N points matériels A_i . Soit $\vec{f}_{i \rightarrow j}$ la force exercée par le point A_i sur le point A_j .

D'après le principe des actions réciproques, $\vec{f}_{i \rightarrow j} = -\vec{f}_{j \rightarrow i}$.

Le travail élémentaire de ces deux forces lorsque leurs points d'application subissent les déplacements infinitésimaux $d\vec{A}_i$ et $d\vec{A}_j$ vaut :

$$\partial W_{ij} = \vec{f}_{i \rightarrow j} \cdot d\vec{A}_j + \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot d\vec{A}_i = \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot (d\vec{A}_i - d\vec{A}_j).$$

$\overline{A_i A_j} = r_{ij} \cdot \vec{u}_{ij}$ si \vec{u}_{ij} est le vecteur unitaire porté par la droite joignant A_i et A_j , orienté de A_i vers A_j .

$d\vec{A}_i - d\vec{A}_j = dr_{ij} \cdot \vec{u}_{ij} + r_{ij} \cdot d\vec{u}_{ij}$ mais puisque \vec{u}_{ij} est un vecteur unitaire $d\vec{u}_{ij} = \vec{0}$, d'où :

$$\partial W_{ij} = \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot dr_{ij} \vec{u}_{ij}.$$

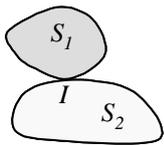
Ce travail élémentaire ne dépend que de la variation de distance entre A_i et A_j .

Remarque : on peut démontrer que le travail des forces intérieures est indépendant du référentiel dans lequel il est calculé. Ainsi, il suffit de choisir le référentiel dans lequel le calcul est le plus simple !

Système continu indéformable:

L'extension du calcul du travail élémentaire pour un système continu est immédiate. En particulier pour un système indéformable $|\vec{A}_i \vec{A}_j| = cte$ donc $\partial W_{ij} = 0$. Ainsi pour un solide indéformable, le travail des forces intérieures est toujours nul.

1.5 Travail des forces de liaison



Soit S_1 et S_2 deux solides en contact supposé ponctuel en I . Soit \vec{R} la force résultante et \vec{M}_I^l le moment résultant en I des actions de contact de S_2 sur S_1 .

\vec{R} et \vec{M}_I^l sont décomposées en leurs composantes parallèles et perpendiculaires au plan tangent en I aux deux solides : $\vec{R} = \vec{R}_{//} + \vec{R}_{\perp}$ et $\vec{M}_I^l = \vec{M}_{//} + \vec{M}_{\perp}$.

Le travail des forces de liaison vaut :

$$\partial W_l = \vec{R} \cdot d\vec{l} + d\vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{M}_I^l$$

avec $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_{//} + \vec{\Omega}_{\perp}$.

Par définition $\vec{v}_g = \vec{V}_R(I \in S_1) - \vec{V}_R(I \in S_2)$ d'où $d\vec{l} = \vec{v}_g dt$, ainsi :

$$\partial W_l = \vec{R}_{//} \cdot \vec{v}_g dt + \vec{M}_{//} \cdot \vec{\Omega}_{//} dt + \vec{M}_{\perp} \cdot \vec{\Omega}_{\perp} dt.$$

D'après les lois du frottement solide, $\vec{R}_{//} \cdot \vec{v}_g < 0$ puisque $\vec{R}_{//}$ est opposée à \vec{v}_g . De même $\vec{M}_{//} \cdot \vec{\Omega}_{//} < 0$ et $\vec{M}_{\perp} \cdot \vec{\Omega}_{\perp} < 0$, d'où :

$$\boxed{\partial W_l < 0}.$$

Le travail des forces de liaison est toujours résistant et conduit donc à une dissipation de l'énergie du système (chaleur).

Liaisons parfaites : une liaison sera dite parfaite si $\partial W_l = 0$.

En particulier dans le cas où les forces de liaison en I se réduisent à \vec{R} ($\vec{M}_I^l = \vec{0}$), la liaison sera parfaite si $\partial W_l = \vec{R}_{//} \cdot \vec{v}_g dt = 0$ donc dans les deux cas suivant :

$$\vec{v}_g = \vec{0} : \text{mouvement sans glissement} : \vec{R} = \vec{R}_{//} + \vec{R}_{\perp},$$

ou,

$$\vec{v}_g \neq \vec{0} \text{ et } \vec{R}_{//} = \vec{0} : \text{mouvement de glissement sans frottement} : \vec{R} = \vec{R}_{\perp}.$$

2 Théorème de l'énergie cinétique (théorème des forces vives)

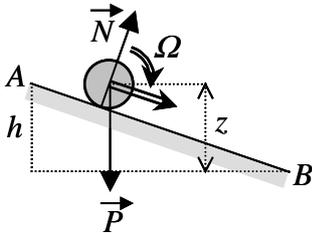
Rappel : pour un point matériel repéré dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux instant t_i et t_f est égale au travail des forces qui s'appliquent à ce point matériel entre ces deux mêmes instants.

On admettra l'extension de ce théorème au cas d'un système matériel quelconque. Le théorème de l'énergie cinétique, parfois appelé théorème des forces vives s'énonce donc ainsi :

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux des forces tant intérieures qu'extérieures, auxquelles il est soumis :

$$\Delta E_c = E_c(t_f) - E_c(t_i) = W_{ext} + W_{int}.$$

Exemple : Cylindre sur un plan incliné. Cherchons à comparer la vitesse du centre de masse d'un cylindre de masse M roulant sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, et celle du même cylindre glissant sans rouler et sans frottement sur le même plan incliné.



Soit un cylindre plein de rayon R et de masse M roulant sans glisser sur un plan incliné. Le contact entre le cylindre et le plan est ponctuel en I . Soit G le centre de masse du cylindre, de vitesse V dans le référentiel lié au plan incliné.

Puisque le mouvement à lieu sans frottement :

$$\vec{v}_g = \vec{V}_R(I \in \text{Cylindre}) - \vec{V}_R(I \in \text{Plan}) = \vec{0}$$

Soit $\vec{v}_g = \vec{V}_R(I \in \text{Cylindre}) = \vec{V}_R(G) + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega} = \vec{0}$. Cette relation conduit sans difficulté à $V = R \Omega$.

Le cylindre est soumis à son poids $\vec{P} = M \vec{g}$ et à la réaction du plan incliné \vec{R} . Le mouvement a lieu sans frottement donc $\vec{R} = \vec{N}$.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à ce cylindre s'écrit :

$$\Delta E_c = E_c(t) - E_c(0) = W_{ext}$$

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \Omega^2 = M g (h - y)$$

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{V}{R} \right)^2 = M g (h - y)$$

d'où

$$V^2 = \frac{2 M g (h - y)}{M + \frac{I}{R^2}}.$$

Si le cylindre glissait sans rouler sur le plan incliné, l'énergie cinétique du système serait uniquement de l'énergie cinétique du au mouvement de translation. La relation ci-dessus serait donc :

$$V^2 = 2g(h - y)$$

Le mouvement de rotation du cylindre entraîne donc un ralentissement du mouvement de translation. En effet, pour ce cylindre roulant sans glisser sur le plan incliné, une partie de l'énergie potentielle initiale est convertie en énergie cinétique de rotation.

3 Théorème des travaux virtuels

Le théorème des travaux virtuels dérive du théorème de l'énergie cinétique dans le cas où le système est immobile. Puisque le système est statique, les travaux des forces auxquelles il est soumis ne peuvent être que virtuels ! En pratique, on calcule ces travaux virtuels en considérant le calcul du travail des forces appliquées si le système était en mouvement.

Ainsi, pour qu'un système à liaisons parfaites, initialement immobile, demeure au repos, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels élémentaires des forces appliquées soit nulle.

Ce théorème est particulièrement intéressant dans le cas où les forces appliquées (tant intérieures qu'extérieures) dérivent d'un potentiel (et les forces de liaison sont parfaites). Pour déterminer la position d'équilibre du système, il ne sera donc pas nécessaire de considérer l'ensemble des forces appliquées mais seulement celles qui seraient susceptibles de travailler si le système était en mouvement.

LOIS DU FROTTEMENT SOLIDE

L'étude des forces de contact entre deux solides ne fait pas l'objet d'une théorie rigoureuse. Le calcul des actions de contact est d'ailleurs très complexe car il dépend de la nature exacte de l'interaction entre des ensembles de particules, de la position de ces particules au voisinage des surfaces en contact et donc de la structure microscopique des surfaces. Toutefois, une approche empirique, représentant parfois grossièrement la réalité, permet néanmoins de proposer un modèle simplifié de ces actions. Ainsi, bien que contrairement aux forces « à distance » telles que la force de gravitation, la force électrostatique..., les forces de contact n'aient pas une expression analytique (mathématique) connue, les modèles phénoménologiques des forces de frottement fournissent des informations supplémentaires qui permettent de prédire le mouvement du système étudié.

I GENERALITES

Il y a *frottements* dès que deux surfaces en contact se déplacent l'une par rapport à l'autre.

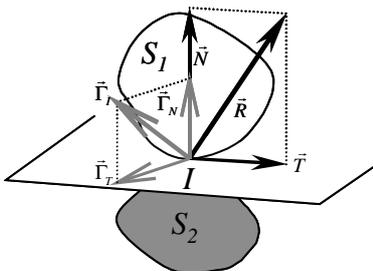
Si S_1 et S_2 sont deux solides en contact et si le contact entre S_1 et S_2 est permanent, S_1 ne peut pas avoir un mouvement quelconque : toutes les conditions qui limitent le mouvement du système constituent des *liaisons*. Ainsi, le nombre de degré de liberté de S_1 est inférieur à 6.

Exemples :

- la boule (assimilée à un point matériel) d'un pendule simple (fil inextensible) : le mouvement de la boule a lieu sur la surface d'une sphère \Rightarrow 2 degrés de liberté.
- Une boule de billard en mouvement sur la table \Rightarrow 5 degrés de liberté.

Les forces (extérieures) qui agissent sur le système pour limiter son mouvement sont appelées *actions de contact* ou *forces de liaisons* ou encore *réactions des obstacles*.

Les actions de contact sont en réalité un ensemble de forces agissant sur la surface de contact entre deux corps. Elles sont donc caractérisées par leurs éléments de réduction : une résultante \vec{R} et un moment résultant $\vec{\Gamma}_Q$ en un point Q quelconque. Si le contact entre les deux corps est quasi ponctuel (point de contact en I), les supports des forces de liaisons passent tous très près du point I si bien que le moment résultant en I est négligeable. L'ensemble des forces de contact peut être alors caractérisé uniquement par sa résultante \vec{R} .



D'une manière générale, les éléments de réduction des forces de liaisons sont caractérisés par leur composantes parallèles et perpendiculaires au plan tangent commun au deux systèmes (solides) en contact :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{T} + \vec{N} \\ \vec{\Gamma}_I &= \vec{\Gamma}_T + \vec{\Gamma}_N\end{aligned}$$

Par définition \vec{T} est la *force de frottement statique/dynamique*, qui s'oppose au mouvement du système (statique) ou freine le mouvement de celui-ci (dynamique).

II LOIS DU FROTTEMENT SOLIDE (lois de Coulomb)

1 Frottement statique

L'expérience courante nous montre que pour faire avancer un corps sur un plan horizontal, il faut exercer une force horizontale dont le module est supérieur à une valeur minimale. Cette force est la composante tangentielle de la réaction qui s'oppose au mouvement de glissement. On peut également facilement se persuader que si le poids du corps à déplacer double, la force tangentielle à exercer pour le mettre en mouvement sera elle aussi doublée.

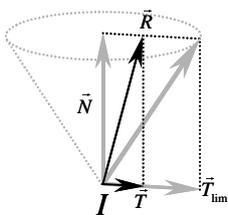
La modélisation de ces observations suggère qu'il n'y aura pas de glissement tant que le rapport des modules des composantes tangentielle et normale de la résultante des forces de contact est inférieur à une valeur f_c appelé *coefficient de frottement statique* :

$$\frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} \leq f_s$$

La valeur du coefficient statique de frottement ne dépend que de la nature et de l'état des surfaces en contact. f_s ne dépend pas de la valeur de $|\vec{N}|$ tant que les systèmes en contact ne subissent pas de déformations. Le coefficient de frottement statique dépend fortement de l'état des surfaces en contact : un polissage des surfaces a notamment pour effet de diminuer la valeur du coefficient de frottement.

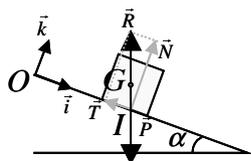
La condition limite impose $|\vec{T}_{\text{lim}}| = f_s |\vec{N}|$. Au delà de cette valeur, un mouvement de glissement s'amorce.

L'interprétation graphique de cet loi empirique est la suivante :



L'équilibre statique est maintenu tant que la résultante des actions de contact se situe à l'intérieur du cône de demi-angle au sommet α tel que $\text{tg} \alpha = \frac{|\vec{T}_{\text{lim}}|}{|\vec{N}|}$.

Exemple : cube en équilibre sur un plan incliné



Soit un cube homogène d'arête a et de masse m en équilibre sur un plan incliné. Ce cube est soumis à son propre poids \vec{P} ainsi qu'à la force de réaction \vec{R} du plan sur lequel il est posé. Bien que le contact ne soit pas ponctuel, on supposera que le moment résultant des forces de contact est nul.

Le système étant à l'équilibre, la première loi de la statique impose :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

qui conduit à :

$$\begin{cases} -T + P \sin \alpha = 0 \\ N - P \cos \alpha = 0 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} T = Mg \sin \alpha \\ N = Mg \cos \alpha \end{cases}$$

La force de frottement statique qui s'oppose au glissement est donc $\vec{T} = -Mg \sin \alpha \vec{i}$.

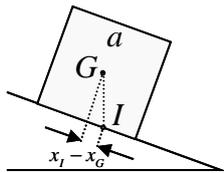
L'équilibre sera maintenu tant que $\frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} \leq f_s$ soit $tg\alpha \leq f_s$ si f_s désigne le coefficient de frottement statique.

La deuxième loi de la statique régit le basculement du cube : le cube ne bascule pas tant que la somme des moments des forces appliquées est nulle :

$$\vec{M}_Q(\vec{P}) + \vec{M}_Q(\vec{R}) = \vec{0} \text{ où } Q \text{ est un point quelconque.}$$

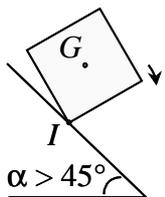
Au point G : $\vec{GI} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ soit

$$\begin{vmatrix} x_I - x_G & -T \\ 0 & N \\ -a/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ T \frac{a}{2} - N(x_I - x_G) \\ 0 \end{vmatrix}$$



$$\text{d'où : } x_I = x_G + \frac{a}{2} tg\alpha.$$

A la limite du basculement, $x_I - x_G = \frac{a}{2}$. Au delà, le cube pivote autour de son arête.



En effet si $tg\alpha > 1$ et en supposant que le cube ne glisse pas ($tg\alpha \leq f_s$) :

$$\vec{M}_G(\vec{R}) = \left[\frac{a}{2} T - N \frac{a}{2} \right] \vec{j} = \frac{a}{2} Mg \cos \alpha (tg\alpha - 1) \vec{j} = M \vec{j} \text{ avec } M > 0$$

Remarque : si $1 > tg\alpha > f_s$, le cube glissera avant de basculer !

2 Frottement dynamique

Lorsque la condition d'équilibre statique est rompue $\frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} > f_s$, un mouvement de glissement apparaît, donc la vitesse de glissement du système n'est plus nulle.

Rappel : Si S_1 et S_2 sont deux solides en contact (ponctuel en I), S_1 a un mouvement de glissement avec frottement par rapport à S_2 si la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 est non nulle :

$$\vec{v}_g \left(\frac{S_1}{S_2} \right) = \vec{V}_{R_2} (I \in S_1) = \vec{V}_R (I \in S_1) - \vec{V}_R (I \in S_2) \neq \vec{0},$$

où R_1 et R_2 sont des repères liés à S_1 et S_2 respectivement.

La loi empirique décrivant les frottements change. L'expérience montre alors que le frottement est convenablement décrit si :

- La composante tangentielle de la résultante des forces de contact à même support que la vitesse de glissement mais un sens opposé à cette dernière :

$$\vec{T} = -\lambda \vec{v}_g \text{ avec } \lambda > 0. \vec{T} \text{ est alors la } \textit{force de frottement dynamique}.$$

- Pour une vitesse de glissement fixée, la norme de la force de frottement est proportionnelle à la composante normale :

$$|\vec{T}| = f |\vec{N}| \text{ où } f \text{ est le } \textit{coefficient de frottement dynamique}.$$

- Le coefficient de frottement dynamique est indépendant de la vitesse de glissement et $f < f_s$.

Exemple : cube glissant sur un plan incliné

En reprenant l'exemple précédent et en supposant $f_s < \tan \alpha < 1$ (le cube glisse avant de basculer).

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} = m \left(\frac{d\vec{V}_R(G)}{dt} \right)_R,$$

$$\text{soit } \begin{cases} -T + P \sin \alpha = m \frac{d^2 x_G}{dt^2} \\ N - P \cos \alpha = 0 \end{cases}.$$

Tandis que le théorème du moment d'inertie s'écrit :

$$\vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{0}, \text{ si le cube ne bascule pas,}$$

$$\text{soit } T \frac{a}{2} = N(x_I - x_G).$$

Il y a donc maintenant 3 équations pour 4 inconnues : T , N , $\frac{d^2 x_G}{dt^2}$ et x_I .

La loi empirique du frottement dans la phase de glissement ($\vec{v}_g \neq \vec{0}$) va donner la quatrième équation manquante :

$\vec{v}_g = \vec{V}_R(I \in \text{cube}) = \vec{V}_R(G) = V \vec{i}$ (avec $V > 0$) : la composante tangentielle \vec{T} s'oppose au mouvement ($\vec{T} = -\lambda \vec{v}_g$ avec $\lambda > 0$)

et $|\vec{T}| = f |\vec{N}| = f Mg \cos \alpha$, si f désigne le coefficient de frottement dynamique.

Ainsi :

$$T = f mg \cos \alpha$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$x_I = x_G + \frac{a}{2} f$$

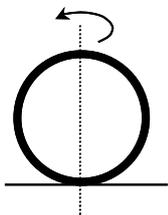
et puisque $\frac{d^2 x_G}{dt^2} = \frac{d^2 (x_G - x_I)}{dt^2}$,

il vient $\frac{d^2 (x_G - x_I)}{dt^2} = g \sin \alpha - f \cos \alpha$ (mouvement uniformément accéléré).

3 Frottement de pivotement et/ou de roulement

La résistance à un mouvement de pivotement ou à un mouvement de roulement d'un système sur un autre peut également être modélisée selon une approche analogue à celle développée pour le frottement de glissement. Soit $\vec{\Omega}_{S/R}$ la vitesse angulaire du système étudié, décomposée selon ses composantes tangentielle et normale au plan de tangence au point de contact : $\vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_N$.

3.1 Frottement de pivotement



Exemple : pour faire pivoter une roue en contact avec le sol autour d'un axe vertical, la pratique courante montre qu'il faut exercer un couple dont le module est supérieur à une certaine valeur minimale afin de surmonter le frottement de pivotement caractérisé par la composante $\vec{\Gamma}_N$ du moment résultant $\vec{\Gamma}$ des forces de contact.

De manière générale, les lois empiriques du frottement de pivotement s'écrivent :

tant qu'il n'y a pas de pivotement : $\frac{|\vec{\Gamma}_N|}{|\vec{N}|} \leq \delta_s$.

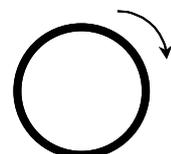
si cette condition n'est plus respectée alors :

$$\vec{\Gamma}_N \text{ s'oppose au pivotement : } \vec{\Gamma}_N = -\beta_p \vec{\Omega}_N$$

$$\text{et } |\vec{\Gamma}_N| = \delta |\vec{N}|$$

δ_s et δ sont les *coefficients de frottement de pivotement statique et dynamique* respectivement.

3.2 Frottement de roulement



Exemple : pour mettre en mouvement une roue posée sur le sol horizontal, il faut exercer un couple dont le module est supérieur à une certaine valeur minimale afin

de surmonter le frottement de roulement, caractérisé par la composante $\vec{\Gamma}_T$ du moment résultant des forces de contact.

De même, les lois empiriques du roulement s'écrivent :

$$\text{tant qu'il n'y a pas de roulement : } \frac{|\vec{\Gamma}_T|}{|\vec{N}|} \leq \tau_s .$$

si cette condition n'est plus respectée alors :

$$\vec{\Gamma}_T \text{ s'oppose au roulement : } \vec{\Gamma}_T = -\beta_r \vec{\Omega}_T$$

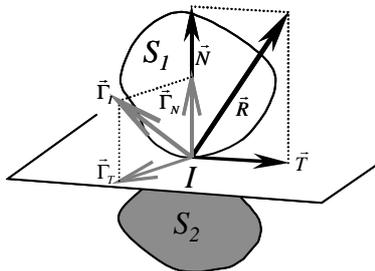
$$\text{et } |\vec{\Gamma}_T| = \tau |\vec{N}|$$

τ_s et τ sont les coefficients de frottement de roulement statique et dynamique respectivement.

Remarque : les coefficients de frottement de pivotement et de roulement sont homogènes à une longueur tandis que les coefficients relatifs au glissement sont sans dimension !

III TRAVAIL DES FORCES DE FROTTEMENT

Soient deux solides en contact ponctuel en I . Soient \vec{R} et $\vec{\Gamma}_I$ les éléments de réduction des forces de contact de S_2 sur S_1 .



$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

$$\vec{\Gamma}_I = \vec{\Gamma}_T + \vec{\Gamma}_N$$

Le travail élémentaire des forces de liaisons s'écrit :

$$\partial W_{\text{liaison}} = \vec{R} \cdot d\vec{I} + \vec{\Gamma}_I \cdot d\vec{\Omega}_{S_1/R} \text{ pour un déplacement élémentaire de } S_1 \text{ sur } S_2 \text{ (supposé immobile).}$$

La vitesse de glissement de S_1 sur S_2 étant non nulle : $\vec{v}_g = \vec{V}_R(I \in S_1)$ si S_2 est immobile.

$$\text{Ainsi } d\vec{I} = \vec{v}_g \cdot dt$$

$$\text{De plus } \vec{\Omega}_{S_1/R} = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_N$$

D'où :

$$\partial W_{\text{liaison}} = \vec{T} \cdot d\vec{I} + \vec{\Gamma}_T \cdot d\vec{\Omega}_T + \vec{\Gamma}_N \cdot d\vec{\Omega}_N = (\vec{T} \cdot \vec{v}_g + \vec{\Gamma}_T \cdot \vec{\Omega}_T + \vec{\Gamma}_N \cdot \vec{\Omega}_N) \cdot dt$$

D'après les lois phénoménologiques du frottement solide :

$$\vec{T} \text{ est opposée à } \vec{v}_g$$

$$\vec{\Gamma}_T \text{ est opposée à } \vec{\Omega}_T$$

$$\vec{\Gamma}_N \text{ est opposée à } \vec{\Omega}_N$$

Il vient finalement

$$\boxed{\partial W_{liaison} < 0}.$$

En particulier, si le système décrit un cycle (par exemple, revient à son point de départ), le travail des forces de liaison ne peut être nul donc l'énergie d'un système soumis à des forces de frottement ne se conserve pas.

Si $\partial W_{liaison} = 0$, les forces de liaison sont dites *parfaites*.

Dans le cas d'un contact ponctuel ($\vec{\Gamma}_l = \vec{0}$) :

$$\partial W_{liaison} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g dt$$

donc $\partial W_{liaison} = 0$ si :

i) $\vec{T} = \vec{0}$: pas de frottement $\Rightarrow \vec{R} = \vec{N}$

ou

ii) $\vec{v}_g = \vec{0}$: pas de glissement (exemple, sphère roulant sans glisser sur un plan incliné), bien que $\vec{T} \neq \vec{0}$!

ANNEXE A : axe de rotation instantanée

Soit R un référentiel supposé galiléen rapporté à un système repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et R_m un deuxième référentiel muni d'un système d'axes orthonormés $(O, \vec{i}_m, \vec{j}_m, \vec{k}_m)$ en rotation dans R autour de O .

Afin de démontrer l'existence du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{Rm/R}$ caractéristique de la rotation de R_m dans R , voyons tout d'abord l'expression de la dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire.

Soit \vec{e}_Δ un vecteur unitaire dont la direction dans un référentiel R peut varier au cours du temps :

$$|\vec{e}_\Delta|^2 = 1 = \vec{e}_\Delta \cdot \vec{e}_\Delta \text{ donc } 0 = \left[\frac{d(\vec{e}_\Delta \cdot \vec{e}_\Delta)}{dt} \right]_R = 2 \vec{e}_\Delta \cdot \left[\frac{d\vec{e}_\Delta}{dt} \right]_R.$$

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire est donc un vecteur qui lui est perpendiculaire.

Appliquons ce résultat au cas où $\vec{e}_\Delta = \vec{i}_m$:

$$\left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{i}_m \text{ avec } \vec{\Omega}_1 = p_1 \vec{i}_m + q_1 \vec{j}_m + r_1 \vec{k}_m \text{ où } p_1, q_1, r_1 \text{ sont les composante de } \vec{\Omega}_1 \text{ dans } R_m.$$

de même pour $\vec{e}_\Delta = \vec{j}_m$ puis $\vec{e}_\Delta = \vec{k}_m$

$$\left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{j}_m \text{ avec } \vec{\Omega}_2 = p_2 \vec{i}_m + q_2 \vec{j}_m + r_2 \vec{k}_m$$

$$\left(\frac{d\vec{k}_m}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_3 \wedge \vec{k}_m \text{ avec } \vec{\Omega}_3 = p_3 \vec{i}_m + q_3 \vec{j}_m + r_3 \vec{k}_m$$

Puisque $(\vec{i}_m, \vec{j}_m, \vec{k}_m)$ forme un trièdre directe alors, par exemple : $\vec{i}_m \cdot \vec{j}_m = 0$ donc

$$\left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R \cdot \vec{j}_m + \vec{i}_m \cdot \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R = 0. \text{ En remplaçant les expressions de } \left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R \text{ et de } \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R, \text{ puis en développant les}$$

produits mixtes obtenus, il vient :

$$\left[(p_1 \vec{i}_m + q_1 \vec{j}_m + r_1 \vec{k}_m) \wedge \vec{i}_m \right] \cdot \vec{j}_m + \vec{i}_m \cdot \left[(p_2 \vec{i}_m + q_2 \vec{j}_m + r_2 \vec{k}_m) \wedge \vec{j}_m \right] = 0$$

$$(-q_1 \vec{k}_m + r_1 \vec{j}_m) \cdot \vec{j}_m + \vec{i}_m \cdot (p_2 \vec{k}_m - r_2 \vec{i}_m) = 0$$

$$\text{donc } r_1 - r_2 = 0.$$

On pourrait montrer de même que $p_1 - p_2 = 0$ et $q_1 - q_2 = 0$.

Ainsi $\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_3 = \vec{\Omega}_{Rm/R}$ et finalement

$$\left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{i}_m \quad \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{j}_m \quad \left(\frac{d\vec{k}_m}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{k}_m.$$

Remarque :

$$\vec{i}_m \wedge \left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right)_R = \vec{i}_m \wedge (\vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{i}_m) = (\vec{i}_m \cdot \vec{i}_m) \vec{\Omega}_{Rm/R} - (\vec{\Omega}_{Rm/R} \cdot \vec{i}_m) \vec{i}_m,$$

$$\vec{j}_m \wedge \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right)_R = \vec{j}_m \wedge (\vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{j}_m) = (\vec{j}_m \cdot \vec{j}_m) \vec{\Omega}_{Rm/R} - (\vec{\Omega}_{Rm/R} \cdot \vec{j}_m) \vec{j}_m,$$

$$\vec{k}_m \wedge \left(\frac{d\vec{k}_m}{dt} \right) = \vec{k}_m \wedge \left(\vec{\Omega}_{Rm/R} \wedge \vec{k}_m \right) = (\vec{k}_m \cdot \vec{k}_m) \vec{\Omega}_{Rm/R} - \left(\vec{\Omega}_{Rm/R} \cdot \vec{k}_m \right) \vec{k}_m,$$

$$\text{d'où } \vec{i}_m \wedge \left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right) + \vec{j}_m \wedge \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right) + \vec{k}_m \wedge \left(\frac{d\vec{k}_m}{dt} \right) = 3\vec{\Omega}_{Rm/R} - \vec{\Omega}_{Rm/R}$$

$$\text{donc } \vec{\Omega}_{Rm/R} = \frac{1}{2} \left[\vec{i}_m \wedge \left(\frac{d\vec{i}_m}{dt} \right) + \vec{j}_m \wedge \left(\frac{d\vec{j}_m}{dt} \right) + \vec{k}_m \wedge \left(\frac{d\vec{k}_m}{dt} \right) \right].$$

ANNEXE B : axe de rotation et de translation instantanées

Décomposition du mouvement d'un solide, à l'instant t , en un mouvement de translation parallèlement à la direction de $\vec{\Omega}_{Rs/R}$ et d'un mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{\Omega}_{Rs/R}$.

Soit S un solide quelconque et deux points A et M de ce solide. Le mouvement de S est repéré dans le référentiel galiléen R .

D'après la relation du champ des vitesses dans un solide, si $\vec{\Omega}_{Rs/R}$ désigne le vecteur rotation instantanée de S dans R :

$$\vec{V}_R(M) = \vec{V}_R(A) + \vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{AM}.$$

Cherchons tout d'abord s'il existe un ensemble de points M appartenant au solide tels que leur vitesse $\vec{V}_R(M)$ soit parallèle à la direction de $\vec{\Omega}_{Rs/R}$ à un l'instant t .

Soit \vec{e}_Ω le vecteur unitaire de la direction de $\vec{\Omega}_{Rs/R}$.

$$\vec{V}_R(M) \cdot \vec{e}_\Omega = (\vec{V}_R(A) + \vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{e}_\Omega = \vec{V}_R(A) \cdot \vec{e}_\Omega + (\vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{e}_\Omega = \vec{V}_R(A) \cdot \vec{e}_\Omega.$$

La projection orthogonale de la vitesse de n'importe quel point du solide sur la direction de $\vec{\Omega}_{Rs/R}$ est donc constante.

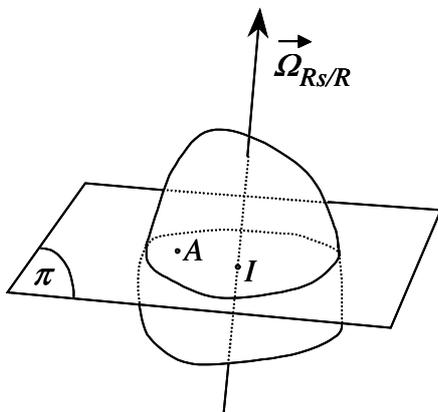
On peut donc décomposer la vitesse du point M selon :

$$\vec{V}_R(M) = \vec{V}_\parallel + \vec{V}_\perp$$

où \vec{V}_\parallel est la composante de la vitesse parallèle à \vec{e}_Ω et \vec{V}_\perp la composante perpendiculaire à \vec{e}_Ω .

L'ensemble des point M recherchés correspond ainsi à l'ensemble des points tels que $\vec{V}_\perp = \vec{0}$ à un instant t donné.

Soit π la section du solide perpendiculaire à $\vec{\Omega}_{Rs/R}$ et passant par le point A . Cherchons dans un premier temps s'il existe un point I de cette section tel que $\vec{V}_\perp(I) = \vec{0}$.



$$\vec{V}_R(I) = \vec{V}_\parallel(I) = \vec{V}_R(A) + \vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \overrightarrow{AI}$$

$$\vec{V}_R(I) \wedge \vec{e}_\Omega = \vec{V}_\parallel(I) \wedge \vec{e}_\Omega = \vec{0}$$

$$\vec{V}_\parallel(I) \wedge \vec{e}_\Omega = \vec{V}_R(A) \wedge \vec{e}_\Omega + (\vec{\Omega}_{Rs/R} \cdot \vec{e}_\Omega) \overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{AI} \cdot \vec{e}_\Omega) \vec{\Omega}_{Rs/R}$$

$$\vec{V}_\parallel(I) \wedge \vec{e}_\Omega = \vec{V}_R(A) \wedge \vec{e}_\Omega + (\vec{\Omega}_{Rs/R} \cdot \vec{e}_\Omega) \overrightarrow{AI}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AI} = \frac{\vec{e}_\Omega \wedge \vec{V}_R(A)}{\vec{\Omega}_{Rs/R} \cdot \vec{e}_\Omega} = \frac{\vec{\Omega}_{Rs/R} \wedge \vec{V}_R(A)}{|\vec{\Omega}_{Rs/R}|^2}.$$

Il existe donc bien, à un instant t donné, un point I unique tel que $\vec{V}_\perp(I) = \vec{0}$ et dont la position par rapport à A est précisée par la relation ci-dessus.

Tous les points M de la droite Δ définie par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AI} + \lambda \vec{e}_\Omega$ vérifient également $\vec{V}_\perp(M) = \vec{0}$ et constitue donc l'ensemble des point recherchés.

Soit H la projection orthogonale d'un point N quelconque du solide sur Δ :

$$\vec{V}_R(H) = \vec{V}_\parallel(H) \text{ par définition des points de } \Delta,$$

et $\vec{V}_R(N) = \vec{V}_R(H) + \vec{\Omega}_{R/S} \wedge \overrightarrow{HN}$ donc $\vec{V}_\parallel(N) = \vec{V}_\parallel(H)$ et $\vec{V}_\perp(N) = \vec{\Omega}_{R/S} \wedge \overrightarrow{HN}$

Puisque cette décomposition est possible pour chaque point du solide S , cette dernière relation montre bien qu'à un instant t donné, pour lequel la rotation du solide est caractérisé par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{R/S}$, le mouvement du solide se décompose en un mouvement de translation parallèlement à la direction de $\vec{\Omega}_{R/S}$ et d'un mouvement de rotation autour de cette direction.

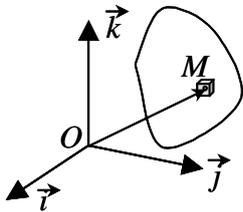
A un instant t' plus tard, le vecteur rotation instantané du solide ayant changé en direction et en norme, l'ensemble des points M' en translation pure dans R est donc également différent de l'ensemble des points M à l'instant t . A l'instant t' , le mouvement du solide peut également être décomposer en un mouvement de translation et un mouvement de rotation en considérant le nouveau vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}'_{R/S}$.

ANNEXE C : Détermination du centre de gravité d'un système :

Soit S un système quelconque repéré dans un référentiel R supposé galiléen.

Soit $\vec{g}(M)$ le champ de la pesanteur au point M de R .

Si M est un point quelconque de S et Q un point de R :



$d\vec{P}(M) = \vec{g}(M)\rho(M)dv = \vec{g}(M)dm$ définit le poids de la particule de volume dv constitutive du système, de masse $dm = \rho(M)dv$, dans le champ de pesanteur $\vec{g}(M)$.

L'ensemble des vecteurs $d\vec{P}(M)$ constitue un ensemble de vecteurs caractérisé par ses éléments de réduction :

$$\vec{P} = \iiint_V d\vec{P}(M),$$

$$\vec{K}_Q = \iiint_V \overrightarrow{QM} \wedge d\vec{P}(M).$$

Le centre de gravité G du système est défini par :

$$\iiint_V |\vec{g}(M)| \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}.$$

Soit C le centre de masse du système. Par définition :

$$\iiint_V \overrightarrow{CM} dm = \vec{0}.$$

Si l'extension spatiale du système est telle que le champ de pesanteur est constant sur tout le volume du système :

$$\vec{g}(M) = \vec{g} = g \vec{k}$$

où \vec{k} définit l'axe vertical.

$$\iiint_V |\vec{g}(M)| \overrightarrow{GM} dm = \iiint_V |\vec{g}| \overrightarrow{GM} dm = g \iiint_V \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

donc $G = C$: le centre de masse et le centre de gravité sont confondus.

EXERCICES

RAPPELS DE MATHEMATIQUES : SYSTEME DE VECTEURS

1) Quelles sont les conditions dans lesquelles les éléments de réduction (i.e. le torseur) associés à un système de trois vecteurs liés (A_1, \mathbf{u}_1) , (A_2, \mathbf{u}_2) , (A_3, \mathbf{u}_3) sont nuls ?

2) Soient les trois vecteurs liés (A_1, \mathbf{u}_1) , (A_2, \mathbf{u}_2) , (A_3, \mathbf{u}_3) .

Dans un repère d'espace $Oxyz$: $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$, $A_3 = (0,0,1)$

$$\mathbf{u}_1 = (0,0,1), \mathbf{u}_2 = (-1,2,0), \mathbf{u}_3 = (\square, \square, \square).$$

Déterminer les composantes de \mathbf{u}_3 telles que le système de ces 3 vecteurs liés soit équivalent à un couple dont on calculera le moment.

3) La paroi verticale d'un barrage, ayant la forme d'un rectangle $ABCD$, retient de l'eau de masse volumique ρ . Dans un repère orthonormé direct $R=(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ on pose :

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = a \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = h \vec{j}$$

En tout point $M(0, y, z)$ du rectangle $ABCD$ s'exerce une action mécanique définie par la densité surfacique :

$$\vec{F}(M) = (p_a + \rho g y) \vec{i}$$

où p_a désigne la pression atmosphérique, g l'accélération de la pesanteur et y la profondeur du point M considéré.

a) Faire un dessin plausible.

b) Déterminer, au point O , les éléments de réduction associés au champ de vecteurs $F(M)$ défini en tout point du rectangle $ABCD$.

STATIQUE I

1) Une sphère pesant 5 kg est suspendue à une corde dont l'une des extrémités est fixée sur un mur vertical. De plus, la sphère ainsi suspendue s'appuie sans frottement contre ce mur. α désigne l'angle entre la corde et le mur. Faire un dessin plausible et déterminer la tension de la corde et la réaction du mur sur la sphère.

2) Soient deux sphères identiques placées dans un système indiqué sur la figure 1. Calculer les réactions des surfaces sur les sphères. Montrer que chaque sphère est en équilibre.

3) Calculer la masse M nécessaire pour maintenir l'équilibre du système représentée sur la figure 2. A_1C est horizontal tandis que A_2B est parallèle au plan incliné. Plan et poulies sont sans frottement. Est-il possible de soulever le bloc ?

4) Un bâton de masse m et de longueur l est posé sur l'angle droit parfaitement poli de la figure 3. Déterminer les positions d'équilibre et les forces de réactions en fonction de l'angle α .

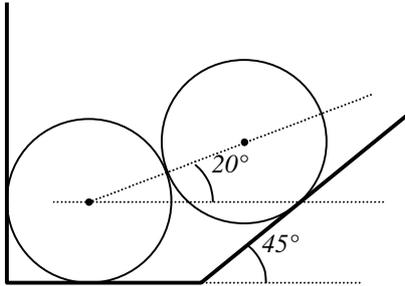


Figure 1

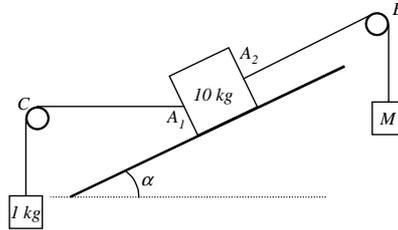


Figure 2

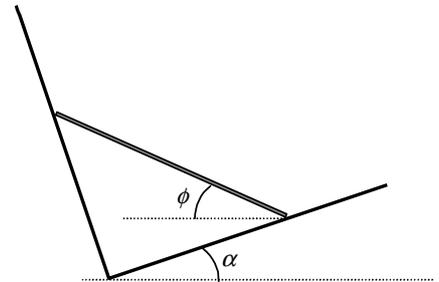


Figure 3

CINEMATIQUE

1) Un point M est mobile dans un plan. Soient R_1 le repère cartésien fixe par rapport au plan et R_2 le repère polaire. Calculer de deux façons la dérivée par rapport au temps (vue de R_1) du vecteur unitaire \mathbf{u}_ρ . Exprimer ensuite dans la base $(O, \mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi)$ les vitesses $\mathbf{V}_1(M)$ et $\mathbf{V}_2(M)$. Mêmes questions pour les accélérations. Y a-t-il quelque chose de changé si les repères ne sont pas galiléens ?

2) Soit une tige OA , de longueur a , pivotant autour du point O , origine du repère fixe $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Soit θ l'angle entre OA et \mathbf{k} . Soit ϕ l'angle entre la projection de OA dans le plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ et \mathbf{i} . Déterminez les composantes du vecteur vitesse de l'extrémité A de la tige dans le repère fixe $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Donner le vecteur de rotation instantanée dans le repère fixe et dans le repère mobile $(O, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m, \mathbf{k}_m)$ et retrouver l'expression du vecteur vitesse de l'extrémité A .

3) Un cône de révolution de demi-angle au sommet α et de hauteur h roule sans glisser sur un plan horizontal. On désigne par \mathbf{u} le vecteur unitaire porté par la génératrice de contact du cône et du plan et par \mathbf{u}' le vecteur unitaire du plan directement perpendiculaire et enfin par \mathbf{k} le vecteur unitaire perpendiculaire au plan complétant le trièdre. On repère la position du cône par l'angle ψ que fait \mathbf{u} avec une direction fixe Ox du plan.

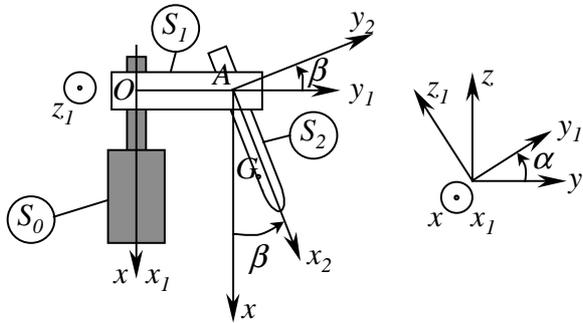
Faire un croquis 3D. Le mouvement est-il plan sur plan ? Quel est l'axe instantané de rotation ? Calculer Ω du cône de deux manières différentes, en fonction des paramètres géométriques et de $d\psi/dt$; d'abord en utilisant la vitesse du centre C de la base du cône, ensuite en décomposant Ω en une vitesse de rotation instantanée de précession autour de \mathbf{k} et une vitesse de rotation instantanée propre autour de l'axe du cône. Calculer la vitesse et l'accélération d'un point M de la périphérie de la base du cône au moment où il est en contact avec le plan horizontal.

4) Un disque mince de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'un anneau fixe de rayon R . Déterminez le vecteur accélération de la particule du disque en contact avec l'anneau.

5) Un train d'engrenages est constitué par quatre roues dentées I, II, III, IV , de rayons respectifs, R_1, R_2, R_3, R_4 , dont les centres O, A, B, C restent alignés sur le bras OC . Ce bras tourne autour de l'axe vertical Oz du repère d'étude à la vitesse angulaire Ω tout en restant dans le plan horizontal (Ox, Oy) . La roue

dentée étant fixe dans le plan (Ox, Oy) , calculez les vitesses angulaires ω_2 , ω_3 et ω_4 des roues II, III et IV par rapport au repère d'étude.

6) On considère une centrifugeuse de laboratoire constituée d'un bâti (S_0) fixe, d'un bras (S_1) et d'une éprouvette (S_2) contenant deux liquides de masses volumiques différentes.



Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras S_1 , S_2 s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras. Le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté au fond de l'éprouvette (ce qui réalise la séparation des deux liquides).

Soit $R=(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ le référentiel fixe (lié à S_0). Les solides S_0 et S_1 ont une liaison pivot d'axe Ox . Soit $R_1=(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ un repère lié à S_1 tel que $Ox_1=Ox$.

Soit $\alpha(t)$ l'angle entre \mathbf{j} et \mathbf{j}_1 à t , avec $\alpha(t) = \omega t$. Les solides S_1 et S_2 ont une liaison pivot d'axe Ak_1 . Soit $R_2=(A, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$ un repère lié à S_2 . Soit $\beta(t)$ l'angle entre \mathbf{i} et \mathbf{i}_2 . Soit \mathbf{G} le centre d'inertie de S_2 tel que $\mathbf{AG} = b \mathbf{i}_2$.

- Déterminer le vecteur rotation de S_1 par rapport à R .
- Déterminer les vecteurs rotation Ω_{S_2/R_1} et $\Omega_{S_2/R}$.
- Déterminer le vecteur vitesse du point G par rapport à R en projection dans R_2 .
- Déterminer le vecteur accélération du point G par rapport à R , en projection dans R_2 .

7) Roulement à billes

La figure ci-dessous présente le schéma de principe d'un roulement à billes.

Soit $R=(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère lié au bâti S_0 . C_1 et C_2 sont deux bagues ayant une liaison pivot d'axe Ok .

$$\text{On pose : } \vec{\Omega}_{C_1/R} = \omega_1 \vec{k}$$

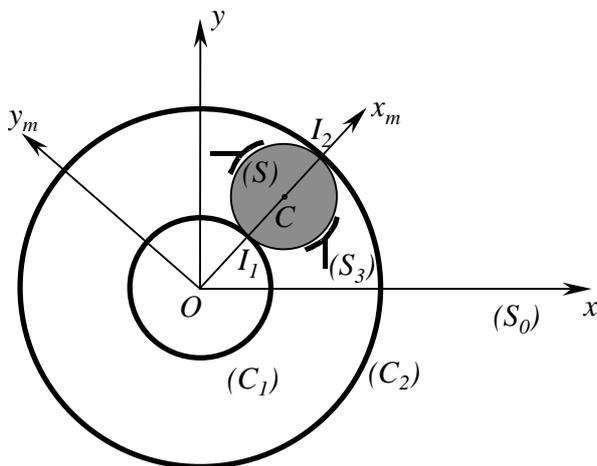
$$\vec{\Omega}_{C_2/R} = \omega_2 \vec{k}$$

La bille S de centre C , animée d'un mouvement plan, roule sans glisser sur C_1 (point de contact I_1) et sur C_2 (point de contact I_2).

Soit $R_m=(O, \mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m, \mathbf{k}_m)$ un repère tel que \mathbf{i}_m ait la même direction que \mathbf{OC} .

$$\text{On pose : } \vec{OI}_1 = r_1 \vec{i}_m \text{ et } \vec{OI}_2 = r_2 \vec{i}_m.$$

La cage S_3 a un mouvement de rotation d'axe Ok par rapport à S_0 .



- Exprimer en I_1 la condition de roulement sans glissement de S par rapport à C_1 .
- Exprimer en I_2 la condition de roulement sans glissement de S par rapport à C_2 .
- En déduire $\vec{V}_R(C)$ et $\vec{\Omega}_{S/R}$ en fonction de ω_1 , ω_2 , r_1 et r_2 .

iv) Déterminer la vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage S3 au point A tel que

$$\vec{CA} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}_m.$$

DISTRIBUTION DES MASSES

1) Déterminer la position du centre de masse d'un arc de cercle homogène de rayon R , vu du centre O sous l'angle 2α . Envisager des cas particuliers intéressants. Mêmes questions pour un secteur de disque, une calotte sphérique et un secteur de sphère.

2) Déterminer le centre d'inertie d'un ensemble formé d'un cône homogène creux (hauteur h , demi-angle au sommet α) fermé par une demi sphère homogène pleine de même masse volumique.

3) Déterminer le moment d'inertie d'une boule homogène pleine, de masse m et de rayon R par rapport à l'un de ses diamètres, puis par rapport à l'une de ses tangentes. Même question pour une surface sphérique.

4) Soit un cylindre droit, plein, homogène, de rayon R , de hauteur h et de masse m . Soit O son centre et Oz son axe de révolution. Déterminer la matrice d'inertie de ce cylindre. Examiner des cas particuliers (disque, tige).

5) Calculer dans ses axes de symétrie, les composantes du tenseur d'inertie au centre O d'un disque homogène de rayon R . En déduire le moment d'inertie du disque par rapport à un axe passant par O incliné d'un angle θ sur l'axe du disque. Mêmes questions avec un demi disque homogène. Trouver les composantes du tenseur d'inertie en C (centre de masse) dans des axes parallèles aux précédents.

CINETIQUE

1) Un cône de sommet O , de hauteur h et dont la base circulaire a un diamètre D , roule sans glisser sur un plan horizontal. Déterminer le moment cinétique du cône en O ainsi que son énergie cinétique dans le référentiel lié au plan.

2) Une tige homogène OA de longueur l et de masse m , est mobile autour d'un point fixe O en restant dans un plan vertical. Soit α l'angle orienté que fait à un instant donné la barre avec l'axe des x vertical descendant. Calculer la résultante cinétique, le moment cinétique en O et l'énergie cinétique. Mêmes questions si α est constant, la rotation s'effectuant cette fois autour de l'axe des x .

3) Un cercle homogène d'axe horizontal tourne autour de sa tangente vertical Oz à la vitesse $\omega\mathbf{k}$, O étant le point de contact du cercle et de la tangente et \mathbf{k} le vecteur unitaire de l'axe des z . Calculer de deux manières différentes son moment cinétique par rapport à l'axe de rotation. Calculer également son énergie cinétique par le second théorème de Koenig et autrement, sa résultante dynamique et son moment dynamique en O .

4) Dans le plan vertical, on considère un quart de disque homogène de centre O , de masse m et de rayon R , tournant à la vitesse angulaire ω autour de son côté fixe Oz . Calculer la résultante cinétique, la résultante dynamique, le moment cinétique en O , le moment dynamique en O . *Ne calculer que ce qui est indispensable !*

5) Une plaque rectangulaire homogène de côtés $2a$, $2b$, de centre O et de masse m , tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'une de ses diagonales Δ fixe par rapport à un certain repère d'étude. Calculer son moment cinétique par rapport à Δ , son moment dynamique en O et son énergie cinétique par rapport à Δ .

6) Deux tiges homogènes OA et AB , chacune de masse m et de longueur l , sont articulées entre elles en A . Elles sont assujetties à rester dans le plan xOy . OA est mobile autour du point O fixe, sa position étant repérée par l'angle polaire $(Ox, OA) = \varphi$ et B glisse sur l'axe des x . Calculer pour ce système le moment cinétique en O et son énergie cinétique.

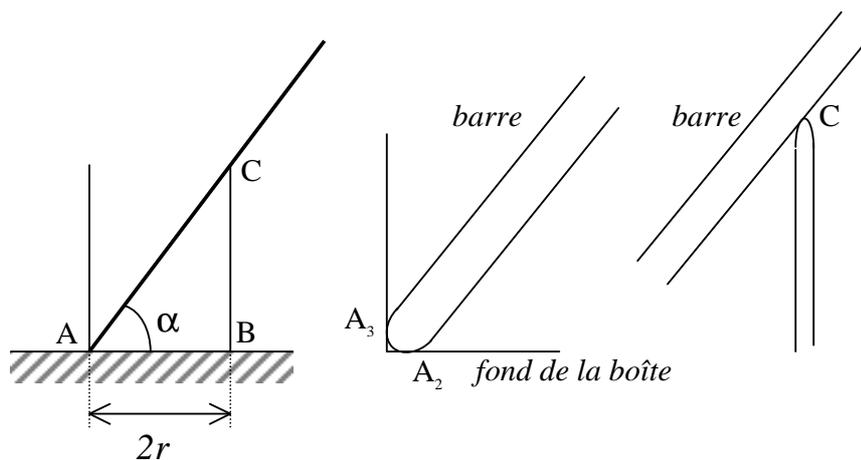
STATIQUE II

1) Un cylindre homogène, droit à base circulaire de rayon r et de hauteur h , est posé sur sa base, en équilibre sur un plan inclinable de α sur l'horizontal. Soit f le coefficient de frottement statique du cylindre sur le plan. Calculer l'angle α_1 à partir duquel le cylindre glisserait et l'angle α_2 à partir duquel il basculerait. Si $f = 0.1$, discuter les deux cas suivant : $h = 30r$ et $h = r$.

2) Une échelle AB est assimilée à une barre homogène de masse m et de longueur l . Elle repose en B sur un plan horizontal et en A sur un mur vertical parfaitement lisse. Soit $f = \text{tg } \varphi$ le coefficient de frottement statique avec le plan horizontal. Cette échelle fait un angle α avec la verticale. Quelle est la condition d'équilibre ?

Une personne de masse M monte sur cette échelle. A quelle condition y a-t-il équilibre quelque soit la position de cette personne sur l'échelle ? Commenter le résultat.

3) Soit une boîte cylindrique de diamètre $2r$, de masse m , dont le centre de gravité G est sur l'axe Oz de révolution. La boîte est posée sur une table horizontale parallèle au plan xOy . Elle contient une barre de masse m , de diamètre négligeable devant sa longueur $2l$, de centre de masse Γ situé en son milieu. La barre est contenue dans le plan xOz . Elle repose dans la boîte aux points de contact A et C .



Ces contacts sont sans frottement. La hauteur de la boîte est caractérisée par l'angle α . Soit $k = m/\mu$. Tout mouvement possible de la barre, de la boîte, ou de l'ensemble sera considéré comme un mouvement dans le plan de la figure.

- i) En étudiant l'équilibre de l'ensemble boîte-barre, trouver une condition sur l pour que l'ensemble ne pivote pas autour du point B. Soit l_{c1} la valeur limite de l . Construire le graphe $l_{c1}(\alpha)$ pour $\alpha \in [0, \pi/2]$.
- ii) Etude de l'équilibre de la barre. Soit \mathbf{R}_1 la réaction de la barre en C, \mathbf{R}_2 la réaction du fond de la boîte en A_2 et \mathbf{R}_3 la réaction de la paroi en A_3 . Calculer \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 et \mathbf{R}_3 en fonction de α et des autres données. Quelle condition doit remplir \mathbf{R}_2 pour que l'équilibre soit possible ? En déduire une condition sur l . Soit l_{c2} la valeur limite de l pour laquelle la barre se déséquilibre. Construire le graphe de $l_{c2}(\alpha)$ sur les mêmes axes que $l_{c1}(\alpha)$.
- iii) Montrer qu'il existe une condition géométrique sur l pour que la barre repose effectivement en A et C. Soit l_{c3} cette valeur limite. Construire $l_{c3}(\alpha)$ sur les axes précédents.
- iv) Trouvez dans le plan (α, l) le domaine sur lequel l'équilibre avec appuis en A et C a lieu. Indiquer ce qui se produit lorsque le point de coordonnées α et l sort de ce domaine d'équilibre.

4) Soit, dans un plan vertical, un système déformable constitué par un losange de sommet O fixe, articulé de manière parfaite. Soit m la masse du losange et l la longueur d'un côté. Dans le plan du losange, un disque de rayon r et de masse m' repose sans frottement sur deux côtés. Déterminer l'équation qui conduit à la position d'équilibre du système.

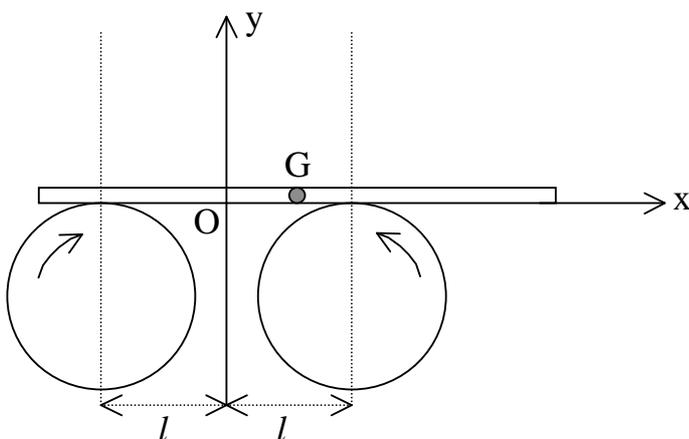
5) On désire suspendre un tableau de hauteur h à un mur lisse de telle sorte que le clou d'attache du fil soit au même niveau que le point le plus haut du tableau. Faire un croquis plausible. Montrer que le point d'attache à l'arrière du tableau doit être situé à une distance déterminée du point le plus bas du tableau. Evaluer l'angle que fait le tableau avec la vertical en fonction de la longueur du fil l et de h . En déduire que l doit être compris entre deux valeurs que l'on exprimera en fonction de h .

6) Soit une barre homogène MN de longueur l et de masse m astreinte à se déplacer dans un plan vertical xOy . Son extrémité N est retenue par un fil inextensible BN de longueur a , accroché à un point fixe B de l'axe vertical Oy . Son autre extrémité M est en contact sans frottement avec l'axe Oy . Faire le croquis. Déterminer à l'équilibre la valeur de $\lambda = BM$ (par la méthode des travaux virtuels).

DYNAMIQUE

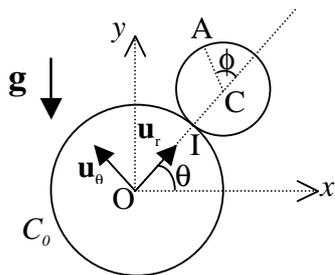
1) Un solide initialement immobile est mis en rotation autour de l'un de ses axes principaux d'inertie Δ fixe. Il est soumis à un couple moteur constant de moment Γ par rapport à Δ et à un couple résistant de moment $\lambda\omega$ par rapport à Δ , ω étant la vitesse angulaire et λ une constante positive. Déterminer $\omega(t)$, C étant le moment d'inertie du solide par rapport à Δ . Etudier la solution $\omega(t)$ dans le cas où $\lambda \rightarrow 0$.

2) Une planche mince, homogène, repose horizontalement sur deux cylindres d'axes parallèles tournant en sens inverse. Les axes de ces deux cylindres sont distants de $2l$. f_c désigne le coefficient de frottement cinétique (dynamique) de la planche sur les cylindres. A l'instant initial, la planche est abandonnée sans vitesse initiale, son centre d'inertie G n'étant pas sur l'axe Oy .



- i) Déterminer les composantes verticales des réactions des deux cylindres en fonction de l'abscisse x de G .
- ii) Les cylindres tournent assez vite pour que la planche glisse sans cesse sur les deux rouleaux. Montrer que cette planche effectue alors des oscillations dont on déterminera la période.
- iii) Le sens de rotation de chacun des cylindres est inversé. Que devient l'équation du mouvement ? Quelle est la différence essentielle par rapport au cas précédent ?

3) Un cylindre plein C (masse m , rayon r , centre C) est en contact extérieur avec un cylindre fixe C_0 (de rayon R) suivant l'une de ses génératrices. Le référentiel $Oxyz$ (origine O au centre de C_0 , $Oy =$ axe vertical) est considéré comme galiléen. Les notations et paramètres du problème sont définis sur la figure représentant une section droite médiane des deux cylindres. Soit $\vec{R} = R_t \vec{u}_\theta + R_n \vec{u}_r$ la réaction en I de C_0 sur C . μ et μ_s sont les coefficients de frottement statique et cinétique (dynamique) respectivement.



Les conditions initiales sont : θ légèrement inférieur à $\pi/2$, $\phi = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\phi} = 0$.

- i) Déterminer la quantité de mouvement et le moment cinétique du cylindre mobile en C .
- ii) Dans la phase initiale du mouvement, le roulement a lieu sans glissement. Ecrire la condition de roulement sans glissement. Que deviennent les éléments cinétiques calculés en 1 ?
- iii) En appliquant les théorèmes généraux en I , trouver une intégrale première du mouvement et les expressions de R_t et R_n en fonction de θ .
- iv) Montrer que la phase de glissement s'achève lorsque θ atteint une valeur limite θ_1 à déterminer.
- v) On suppose que le mouvement ultérieur est ensuite caractérisé par $\mu=0$. En appliquant le théorème de la résultante cinétique, trouver une intégrale première du mouvement en θ et l'expression de R_n en fonction de θ .

vi) Montrer que cette phase se termine par une rupture de contact pour une valeur θ_2 de θ à déterminer. Décrire sommairement le mouvement ultérieur.

4) Sur le plan parfaitement horizontal d'un billard, une boule sphérique, percutée par la queue de billard du joueur, amorce un mouvement avec des conditions initiales quelconques pour son vecteur de rotation et pour la vitesse de son centre de masse. Le tapis de cette table est tel que la boule glisse avec un coefficient de résistance au glissement f . Elle roule et pivote sans résistance au roulement et au pivotement (tant que ces résistances sont petites vis-à-vis de la résistance au glissement). Etudier les différentes phases du mouvement de cette boule. Pour cela :

- i) Dédurre de l'application des théorèmes généraux, que l'accélération du centre d'inertie et la dérivée par rapport au temps du vecteur rotation instantanée sont des fonctions simples de la vitesse de glissement \mathbf{v}_g .
- ii) Etudier les variations de \mathbf{v}_g . Conclusion ?
- iii) A quel instant \mathbf{v}_g s'annule-t-elle ? Si on appelle première phase du mouvement celle qui se termine lorsque $\vec{v}_g = \vec{0}$, identifier la trajectoire de G dans la première phase. Décrire sommairement la phase ultérieure.

5) A l'instant $t = 0$, un cylindre posé sur un plan horizontal a une vitesse de rotation ω autour de son axe, la vitesse de son centre de masse est nulle. Etudier le mouvement du cylindre (le coefficient de frottement du cylindre sur le plan est f).

6) Un véhicule à 4 roues groupées en deux essieux est schématisé de la manière suivante : le châssis est mince et symétrique ; les roues sont représentées par deux cylindres identiques homogènes, de même masse et de rayon R . La masse totale de la voiture est M . Les cylindres sont mobiles sans frottement autour de leurs axes parallèles et horizontaux, solidaires du châssis et distants de L . Le véhicule peut se déplacer sur un plan horizontal dans le champ de pesanteur. On suppose que la réaction du sol sur chaque roue se réduit à une force appliquée en un point de la génératrice de contact ; les cylindres roulent sans glisser sur le sol.

- i) Exprimer l'énergie cinétique de la voiture en fonction de M, m, R et \dot{x} où x représente l'abscisse du barycentre de la voiture.
- ii) Le moteur, rigidement lié au châssis, applique sur le cylindre arrière un couple constant Γ . En supposant négligeable la résistance de l'air, déterminer l'accélération de la voiture.
- iii) La résistance de l'air est représentée par une force appliquée en G et ayant pour expression $\vec{f} = -kS|\vec{v}| \cdot \vec{v}$, où k est un coefficient dépendant de la forme de la voiture (coefficient de pénétration) et S la surface frontale maximale de la voiture animée d'une vitesse \mathbf{v} . Calculer la vitesse maximale de la voiture.

7) Soit D un demi-cylindre creux d'axe horizontal Cy , de rayon R reposant initialement le long de sa génératrice de contact Oy sur un plan horizontal, le plan diamétral AB étant vertical. Le coefficient de frottement entre le demi-cylindre et le plan est f . D est abandonné sans vitesse initiale dans cette position. Déterminer la valeur minimale de f pour que D roule sans glisser dès le début de son mouvement.

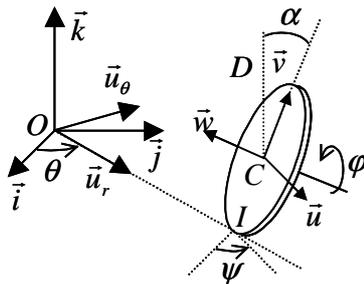
EXAMEN (ANNALES)

NOVEMBRE 2001

Théorie approchée du cerceau

Un disque D plat homogène de centre C , de rayon a , d'épaisseur e et de masse m roule sans glisser sur un plan horizontal. Soit f le coefficient de frottement du disque sur le plan.

$R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère (galiléen) lié au plan horizontal.



$R_p = (C, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le repère défini sur le dessin :

\vec{w} est parallèle à l'axe du disque,

\vec{u} est dans le plan horizontal et perpendiculaire à l'axe du disque.

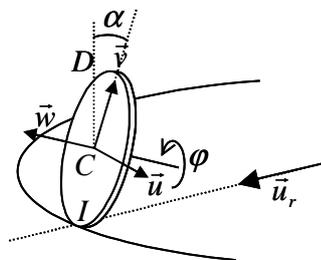
$R_m = (O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ est le repère des coordonnées cylindriques tel que

$$\overrightarrow{OI} = R \vec{u}_r.$$

Questions préliminaires

- 1) Donner les composantes de la vitesse angulaire du disque $\vec{\Omega}_{D/R}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 2) Déterminer le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{R_p/R}$.
- 3) Donner l'expression des composantes de la vitesse de C dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 4) Déterminer la matrice d'inertie du disque plat dans sa base principale d'inertie.

Première partie



Dans cette partie, le point de contact I du disque avec le plan horizontal décrit une circonférence de rayon R , à la vitesse angulaire Ω constante. Le plan du disque fait un angle α constant avec la verticale. Dans ce mouvement : $\vec{u} = \vec{u}_\theta$ donc $\Omega = \dot{\psi}$.

- 5) Déterminer l'expression de $\dot{\phi}$ en fonction de R , a et Ω .
- 6) Déterminer les composantes tangentielle et normale de la force de réaction du plan sur le disque.
- 7) Donner l'expression de l'angle critique α_c , en fonction de ψ au delà duquel il y aura un mouvement de glissement. Quelle est la direction du glissement ?
- 8) Que devient l'expression de $\vec{\Omega}_{D/R}$ dans le cas où $R \gg a$?

Dans la suite, on suppose $R \gg a$ et $e \ll a$.

- 9) En appliquant le théorème du moment cinétique en C dans le référentiel du centre de masse, déterminer l'expression de $\tan \alpha$ en fonction de a , R , $\dot{\phi}$, m et d'un moment d'inertie.
- 10) Montrer que le mouvement du disque peut être considéré comme un mouvement autour d'un point fixe O' que l'on déterminera (donner le vecteur $\overrightarrow{OO'}$).

Deuxième partie

Dans cette partie, le disque roule toujours sans glisser sur le plan horizontal mais le mouvement du point de contact I est quelconque. On considère $e \ll a$. De plus, la vitesse de rotation du disque autour de son axe est supposée très grande devant les autres vitesses angulaires ($\dot{\varphi} \gg \dot{\alpha}, \dot{\psi}$).

- 11) Ecrire le théorème du moment cinétique au point de contact I .
- 12) Ecrire les composantes du moment cinétique en I dans le repère R_p .
- 13) Dédire des deux questions précédentes, les trois équations différentielles du mouvement en fonction des angles d'Euler ψ , α et φ .
- 14) Donner la condition pour qu'un mouvement à $\alpha \approx \alpha_0 = cte$ soit possible et en déduire que la vitesse de précession et de rotation propre sont également constantes. Quel est alors le mouvement du disque ?

SEPTEMBRE 2001

Mouvement d'une boule de billard

Une boule sphérique et homogène, de masse m de rayon R , est en mouvement sur le tapis d'un billard (horizontal et fixe). Le référentiel R_0 lié au billard est supposé galiléen. Le coefficient f de frottement boule-tapis est constant. Soit \underline{N} la réaction normale et \underline{T} la réaction tangentielle s'exerçant sur la boule en A au point de contact de la boule et du tapis (A appartient à la boule). Soit $\underline{\Omega}$ la vitesse de rotation instantanée de la boule par rapport à R_0 .

- 1) A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique et du théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse G de la boule, établir les deux équations différentielles vectérielles reliant \underline{T} à l'accélération angulaire $d\underline{\Omega}/dt$ et à l'accélération de G .
- 2) Montrer que la vitesse de glissement de la boule sur le tapis est \underline{V}_A . Donner son expression en fonction de $\underline{\Omega}$ et de \underline{V}_G . Calculer $d\underline{V}_A/dt$ en dérivant \underline{AG} (constant). En déduire une expression simplifiée en utilisant les deux équations de la question précédente.
- 3) On s'intéresse à \underline{T} . Son module, sa direction et son sens sont fournis par les lois du frottement de glissement. Les écrire. Que peut-on dire des directions de \underline{V}_A et de $d\underline{V}_A/dt$? En déduire la propriété intéressante de \underline{V}_A et de celle de \underline{T} .
- 4) Donner la solution en $\underline{\Omega}$ et \underline{V}_G des équations différentielles de la question 1, dans le cas où, quel que soit l'instant, il n'y a pas de glissement (cela dépend des conditions initiales). Comment qualifier le mouvement de G ? L'axe de rotation a-t-il une direction fixe ?
- 5) Dans le cas où le glissement existe, montrer succinctement que G a en général une trajectoire parabolique, que la vitesse de pivotement ne change pas et que la vitesse de glissement finit par s'annuler. Quel est alors le mouvement ultérieur ?

Note : Les vecteurs sont écrits en lettres **grasses soulignées**

On rappelle :

Moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R par rapport à l'un de ses diamètres $= 2mR^2/5$

Formule du double produit vectoriel : $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

JUIN 2001

Equilibre d'un skieur

Un skieur descend une piste assimilée à un plan incliné (faisant un angle α avec l'horizontal), selon la ligne de plus grande pente ($\sin \alpha = 0,2$). Soit R un référentiel galiléen lié à la piste : Ox est parallèle à la ligne de plus grande pente, Oz est perpendiculaire au plan de la piste et Oy parallèle à l'horizontal. On suppose que les mouvements du skieur restent dans le plan Oxz .

Le skieur est assimilé à une masse $m = 60 \text{ kg}$ (la masse des skis est négligée). Le contact ski-skieur est supposé ponctuel en S . Le centre de masse du skieur est défini par le vecteur \vec{SG} de norme l constante, faisant un angle θ avec Oz . Le moment d'inertie du skieur autour de l'axe Gy est égal à I . Outre son poids, le skieur subit une force de frottement \vec{R}_a due à la résistance de l'air. Dans cette étude, la résistance de l'air due à la rotation de G autour de S est négligée ainsi $\vec{R}_a = -KS v_R(S)^2 \vec{i}$ avec $K = 0,6$ et $S = 0,5 \text{ m}^2$, $v_R(S)$ la vitesse de S dans R et \vec{i} le vecteur directeur de l'axe Ox .

Etude semi-quantitative :

On suppose le contact avec le sol sans frottement. Le skieur est débutant : il n'agit pas sur ses skis.

- 1) Donner le nombre de degrés de liberté du système « skieur+skis ».
- 2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la vitesse limite de ce skieur débutant.
- 3) Lorsque la vitesse limite est atteinte, déterminer la valeur θ_e de θ permettant l'équilibre.
- 4) Le skieur entre dans une zone de neige poudreuse. Que va-t-il se passer ? Que doit faire le skieur ?

Etude quantitative :

Le skieur est maintenant confirmé : il agit sur ses skis par un couple \vec{C} parallèle à Sz est une force \vec{F} .

- 5) Quel est le nombre de degrés de liberté du système « skieur seul » ?
- 6) En appliquant le théorème de la résultant cinétique et du moment cinétique en S , déterminer les équations du mouvement.
- 7) Le skieur à une inclinaison constante θ_0 par rapport à Sz . Quelle est, en fonction de α et θ_0 , la valeur de $C = |\vec{C}|$ qui permet un tel équilibre ? Quelle est la position la plus confortable pour le skieur ?

- 8) Le skieur est passif ($\vec{C} = \vec{0}$). On souhaite déterminer sa stabilité par rapport à θ_0 . On pose $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ et on admet que ε , $d\varepsilon/dt$ et $d^2\varepsilon/dt^2$ sont des infiniment petits du même ordre. Déterminer l'équation différentielle que doit vérifier ε en ne conservant que les termes du 1^{er} ordre. Conclusion quant à la stabilité du skieur ?
- 9) Le skieur est actif : $C = k(\theta - \theta_0)$. Donner les équations du mouvement.
- 10) Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par ε (toujours au second ordre près).
- 11) Quelle est la condition sur k qui permet la stabilité du skieur ?
- 12) Quelle est l'influence de la pente α sur les valeurs de k assurant la stabilité ?

Etude qualitative d'un funambule

On se propose d'étudier qualitativement l'équilibre d'un funambule sur un fil. Un funambule marche sur un fil horizontal. A l'instant initial, son corps fait un petit angle \square avec l'axe vertical Oz . Il tient son balancier perpendiculairement à son corps. Dans quel sens doit-il tourner le balancier pour retrouver l'équilibre ? (justifier sommairement).

MARS 2001

Cinématique

Un plateau circulaire P , de rayon R , est mis en rotation autour de son axe, grâce à un système constitué d'une tige T , de longueur $2l$, aux extrémités de laquelle sont articulés deux disques identiques D_1 et D_2 , de rayon r et de centre C_1 et C_2 respectivement. La tige est perpendiculaire à l'axe de rotation du plateau et son centre H est situé sur cet axe, sous le plateau, à une distance r de P , de telle sorte que D_1 et D_2 soient en contact avec P . Soit \vec{u} le vecteur unitaire orienté de H vers C_1 . On suppose que le contact des disques D_1 et D_2 avec le plateau (respectivement en I_1 et I_2) se fait sans glissement. Le plateau, la tige et les deux disques sont des solides homogènes.

Soit $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ les vitesses de rotation de P et de T respectivement, par rapport au référentiel du laboratoire $R=(Oxyz)$. L'origine O du repère est prise à l'intersection du plateau et de son axe de rotation. L'axe du plateau est parallèle à l'axe Oz tandis que le plan du plateau est dans le plan xOy . Soit ω_1 et ω_2 les vitesses de rotations de D_1 et D_2 par rapport à T .

- 1) Faire un dessin « 3D » plausible.
- 2) Donner les vecteurs rotations $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$ de D_1 et D_2 dans le repère R .
- 3) Que se passe-t-il si le mouvement de la tige est bloqué ?
- 4) Déterminer les relations liant $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ et ω_1 d'une part et $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ et ω_2 d'autre part. En déduire une relation entre ω_1 et ω_2 . Conclusion ?
- 5) Le plateau est bloqué. Que deviennent Ω_1 et Ω_2 ? Représenter géométriquement ces vecteurs.

Statique

Une échelle double se compose de deux échelles simples AS et BS de même longueur l , de même poids Mg , articulées sans frottement au sommet commun S . Soit 2α l'angle au sommet des deux échelles et μ le coefficient de frottement avec le sol. Un homme H de poids mg monte sur l'échelle AS à une distance x du sommet S .

- 1) Faire un dessin plausible.
- 2) En appliquant le principe de la statique une première fois au système « échelle+homme » et une deuxième fois au système « échelle BS seule », déduire les expressions des composantes tangentielle et normale des réactions en A et en B du sol sur l'échelle double.
- 3) Si $m=M/2$, montrer que lorsque l'angle α augmente, l'échelle BS glisse la première. On posera :

$$u = \frac{m}{M} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \text{ et } f(u) = \frac{2+u}{3-u}. \text{ On rappelle que pour } u \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \frac{2}{3} \leq f(u) \leq 1.$$

Remarque : ce résultat est en réalité indépendant du rapport m/M .

NOVEMBRE 2000

Cinématique

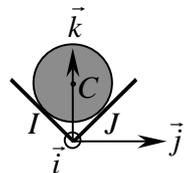
Exercice 1

Un disque D_1 de centre C_1 , de rayon R_1 est lié à une tige OC_1 de longueur l disposée suivant son axe. Le solide ainsi formé est mobile autour du point O_1 . Le disque repose sur un deuxième disque D_2 horizontal de centre O , origine du repère fixe R (cf. figure). Le point O_1 est disposé à une distance h du point O ($h < l$) sur l'axe $O\vec{k}$. Le disque D_1 roule sans glisser sur D_2 . Soit ω la vitesse de rotation de D_2 autour de l'axe vertical $O\vec{k}$. Soit ω_1 la vitesse de rotation de D_1 autour de son axe OC_1 . Déterminer l'expression de la vitesse angulaire Ω_1 de rotation de D_1 dans R autour de l'axe $O\vec{k}$.

Réponse : $\Omega_1 = \omega + \omega_1 \frac{R_1}{R_1 \cos \alpha}$

Exercice 2

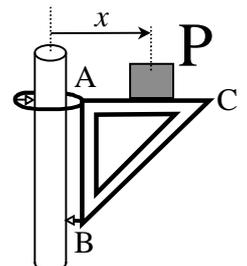
Une bille sphérique de rayon r roule sans glisser sur un rail à section droite en forme de dièdre droit (points de contacts I et J). Le mouvement est-il plan sur plan ? Quelle est la direction du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ de la bille ? En déduire la relation entre la vitesse V du centre de la bille et sa vitesse de rotation Ω .



Réponse : $V_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega r$

Statique : Equerre mobile

Une équerre mobile ABC , ayant la forme d'un triangle rectangle isocèle ($AB = AC = h$) est installée sur une tringle verticale de section cylindrique, de diamètre $2r$. Le coefficient de frottement statique entre l'équerre et la tringle est μ_s . Une charge P de masse M est placée sur AC . Calculer la distance minimale x à l'axe de la tringle pour laquelle la charge



P peut être supportée sans qu'il y ait glissement de l'équerre (le poids de l'équerre sera négligé devant celui de la charge).

$$\text{Réponse : } x = \frac{h}{2\mu_s}$$

SEPTEMBRE 2000

Chute d'une cheminée

Une cheminée est modélisée par un cylindre homogène de longueur L , de rayon R très petit devant L , de masse M et de centre d'inertie G . L'équilibre de la cheminée est détruit : elle amorce une rotation autour de sa base O dans le plan vertical xOz . Soit θ l'angle de la cheminée avec la direction verticale Oz . Le mouvement de la cheminée est étudiée dans le repère $R=(O, x, y, z)$ en projection sur la base mobile des coordonnées polaires \mathbf{u}, \mathbf{v} ou \mathbf{u} est porté par l'axe de la cheminée et \mathbf{v} est directement perpendiculaire à \mathbf{u} dans le sens de rotation de l'angle θ .

1) Déterminer la matrice d'inertie d'un cylindre homogène de longueur L et de rayon R en son centre de masse G . En déduire les moments d'inertie de la cheminée :

- en G autour de l'axe Gy ,
- en O autour de l'axe Oy ,

en fonction de M et L .

$$\text{Réponse : } [I_G] = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \quad \text{avec } J = \frac{1}{2}MR^2, \quad I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}MR^2$$

$$J_{Gy} = \frac{1}{12}ML^2 \quad \text{et} \quad J_{Oy} = \frac{1}{3}ML^2.$$

2) Exprimer les coordonnées de la vitesse et de l'accélération de la cheminée dans la base (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .

$$\text{Réponse : } \vec{V}_R(G) = \frac{L}{2}\dot{\theta}\vec{v} \quad \vec{\gamma}_R(G) = -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\vec{u} + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\vec{v}.$$

3) Déterminer l'équation différentielle du mouvement. Cette équation différentielle ressemble-t-elle à celle d'un système connu (à préciser !) ? Peut-on linéariser l'équation moyennant une hypothèse raisonnable ?

Réponse : $\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta = 0$ (à partir du théorème du moment cinétique) cf. pendule pesant lâché à partir de sa position d'équilibre instable, donc pas de linéarisation possible de l'équation ($\sin\theta \neq \theta$).

4) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale de la cheminée. Retrouver (en justifiant !) l'équation différentielle établie à la question précédente.

Réponse :
$$E_m = \frac{1}{2} ML \left(g \cos \theta + \frac{L}{3} \dot{\theta}^2 \right) = cte.$$

5) Exprimer les composantes R_u et R_v de la réaction du sol en O en projection sur \mathbf{u} , \mathbf{v} en fonction de M , g et θ .

Réponse :
$$R_u = \frac{1}{2} Mg (5 \cos \theta - 3) \quad R_v = -\frac{1}{4} Mg \sin \theta.$$

6) Le contact de la cheminée avec le sol peut-il être rompu ? Dans l'affirmatif pour quelle valeur de θ la cheminée décolle-t-elle du sol ?

Réponse : contact rompu si $R_z = R_u \cos \theta - R_v \sin \theta = 0$ soit pour $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

En réalité, la cheminée peut se briser au cours de sa chute. Le reste du problème va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute.

Une longueur $ON = l$ de cheminée subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action en N du reste de la cheminée sur elle-même. Cette action maintient la rigidité de la cheminée. Le contact en N n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur l se résume à une force de composante S_u et S_v et à un couple C porté par l'axe horizontal Oy .

7) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur l de cheminée, exprimer S_v en fonction de M , g , θ , l et L . S_v définit l'effort de cisaillement. Si la cheminée perd sa rigidité, S_v va entraîner un effritement de la cheminée. En quels points la cheminée aura-t-elle tendance à s'effriter ?

Réponse :
$$S_v = Mg \sin \theta \left[\frac{3}{4} \frac{l^2}{L^2} - \frac{l}{L} + \frac{1}{4} \right]$$
 point d'effritement : extremum (max) de S_v soit pour $l=0$.

8) Déterminer le moment cinétique de la longueur l de cheminée en son centre de masse G_l . En déduire, en partant de la relation de définition, le moment cinétique de la longueur l de cheminée en N.

Réponse :
$$\vec{\sigma}_l(G_l) = \frac{1}{12} \frac{l}{L} M l^2 \dot{\theta} \vec{y} \quad \vec{\sigma}_l(N) = -\frac{1}{6} M \frac{l^3}{L} l \dot{\theta} \vec{y}.$$

9) Montrer que l'on peut appliquer le théorème du moment cinétique à la longueur l de cheminée au point N. En déduire la valeur du couple C.

Réponse : Théorème du moment cinétique possible en N car trajectoire parallèle à G_I .

$$C = \frac{1}{4} M l g \sin \theta \left[1 - \frac{l^2}{L^2} + 2 \frac{l}{L} \right].$$

10) Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ?

Réponse : $C = C_{\max}$ pour $l = \frac{L}{3}$.

Références bibliographiques :

J.P. PEREZ,

« Mécanique : fondements et applications »

5^{ème} éd. Masson (1997)

M. ALONSO et E.J. FINN,

« Physique générale, Tome1 : mécanique et thermodynamique »

2^{ème} éd. (?).

M. BERTIN, J.P. FAROUX et J. RENAULT

« Mécanique 1 : mécanique classique des systèmes de points et notions de relativité ».

« Mécanique 2 : mécanique du solide et notions d'hydrodynamique ».

éd. Dunod

Voir également :

M. BONVALET

« Les principes de la mécanique »

éd. Masson (1997)

Y. BREMONT et P. REOCREUX

« Mécanique 1 : Mécanique du solide indéformable : calcul vectoriel, cinématique »

« Mécanique 2 : Mécanique du solide indéformable : statique »

« Mécanique 3 : Mécanique du solide indéformable : dynamique »

éd. Ellipses (1995...)

D. BELLET

« Cours de mécanique générale »

éd. Cepadues (1988)

G. BRUHAT

« Cours de Physique générale. Mécanique »

éd. Masson (1967)

J. BOUTIGNY et A. GEORGES

« Mécanique du corps solide »

éd. Vuibert (1995)

